1399-7

BÓVEDAS CÁSCARA

DE HORMIGÓN DE CEMENTO PORTLAND

RECEIVED
OCT 2 - 1943
A. S. T. M.

La teoría de las membranas aplicada al cálculo de bóvedas y cúpulas autoportantes

Concrete Buildings.

INSTITUTO DEL CEMENTO PORTLAND ARGENTINO

EI

Es propiedad del Instituto del Cemento Portland Argentino, habiéndose efectuado el depósito que establece la Ley Nacional N.º 11.723.

[BLANK PAGE]

API INTERNATIONAL

CCA

BÓVEDAS CÁSCARA
DE HORMIGÓN DE CEMENTO PÓRTLAND

Serie E

N.° 21 E 2

El Hormigón de Cemento Portland

BÓVEDAS CÁSCARA

DE HORMIGÓN DE CEMENTO PORTLAND

La teoría de las membranas aplicada al cálculo de bóvedas y cúpulas autoportantes

INSTITUTO DEL CEMENTO PORTLAND ARGENTINO

Calle San Martín 1137 **Buenos Aires, R. A.**

SECCIONALES

CÓRDOBA: R. Indarte 170 **MENDOZA: P. Mendocinas 1071**

LA PLATA: Calle 50 N° 610 **ROSARIO: Córdoba 1402**

ÍNDICE

PÁG.

Carácter monolítico del hormigón 9

Hipótesis fundamental 12

Losa plana 12

Placa con grandes deformaciones 13

Membranas sin flexión 15

Teoría de las membranas 16

Bóvedas y caños autoportantes 18

Ecuaciones fundamentales 19

Fórmulas para el cálculo 22

Cálculo de la bóveda 26

Caso práctico 27

La continuidad en las bóvedas autoportantes 36

Cúpulas 39

Cúpulas esféricas 39

Cúpulas elípticas 44

Bóvedas por aristas 47

Cálculo de las bóvedas autoportantes computando los momentos flectores 52

Bibliografía 63

ID 88-B1113+ TCF

CARÁCTER MONOLÍTICO DEL HORMIGÓN

Las construcciones de hormigón armado se caracterizan principalmente por su carácter monolítico, con lo cual se quiere significar que una parte de la estructura no puede deformarse bajo la acción de las cargas que actúan, sin que se deformen también las partes vecinas, que ayudan en esta forma y contribuyen en todo su conjunto al sostenimiento de las cargas repartiendo los esfuerzos a todos sus elementos.

El progreso del hormigón armado se ha producido, como consecuencia de este carácter, al determinarse, con un mejor conocimiento de los materiales que integran el hormigón, la repartición de tensiones a lo largo de las estructuras, modificando así las formas de cálculo primitivas que habían sido traducidas demasiado literalmente de las empleadas para las estructuras de hierro, madera y mampostería.

Así, por ejemplo, al tener en cuenta que las vigas de un entrepiso no trabajaban independientemente de la losa sobre ella apoyada, nació la viga placa. Las losas con armaduras cruzadas, los *pilz decke*, etc., son otras tantas aplicaciones características y propias del hormigón armado, al considerársele en su aspecto fundamental.

Actualmente se insiste, aun en los edificios comunes, en la necesidad de contemplar el aspecto monolítico del hormigón, y así, por ejemplo, se lee en las recomendaciones estadounidenses para el uso del hormigón armado (1).

"*Se sostiene respecto a la teoría de la elasticidad, que el proyecto de una estructura monolítica, considerada como un conjunto de elementos aislados, no es racional . . .*

---

(1) *Métodos recomendados para el uso del hormigón simple y armado*, pág. 62. Traducción del Instituto del Cemento Portland Argentino.

"Aun cuando dicha práctica ha dado al parecer muy buenos resultados, tratándose de edificios con columnas colocadas a distancias iguales, está perfectamente demostrado que el coeficiente de seguridad adoptado no es el mismo para toda la estructura, y a veces ni siquiera el previsto en el cálculo."

Estas consideraciones muy acertadas hacen ver las ventajas y la necesidad de estudiar estas construcciones en su aspecto monolítico.

El estudio de las bóvedas en general, y especialmente de las de cañón corrido, es actualmente un problema que ha sido perfectamente resuelto al ser encarado bajo la forma de estructuras

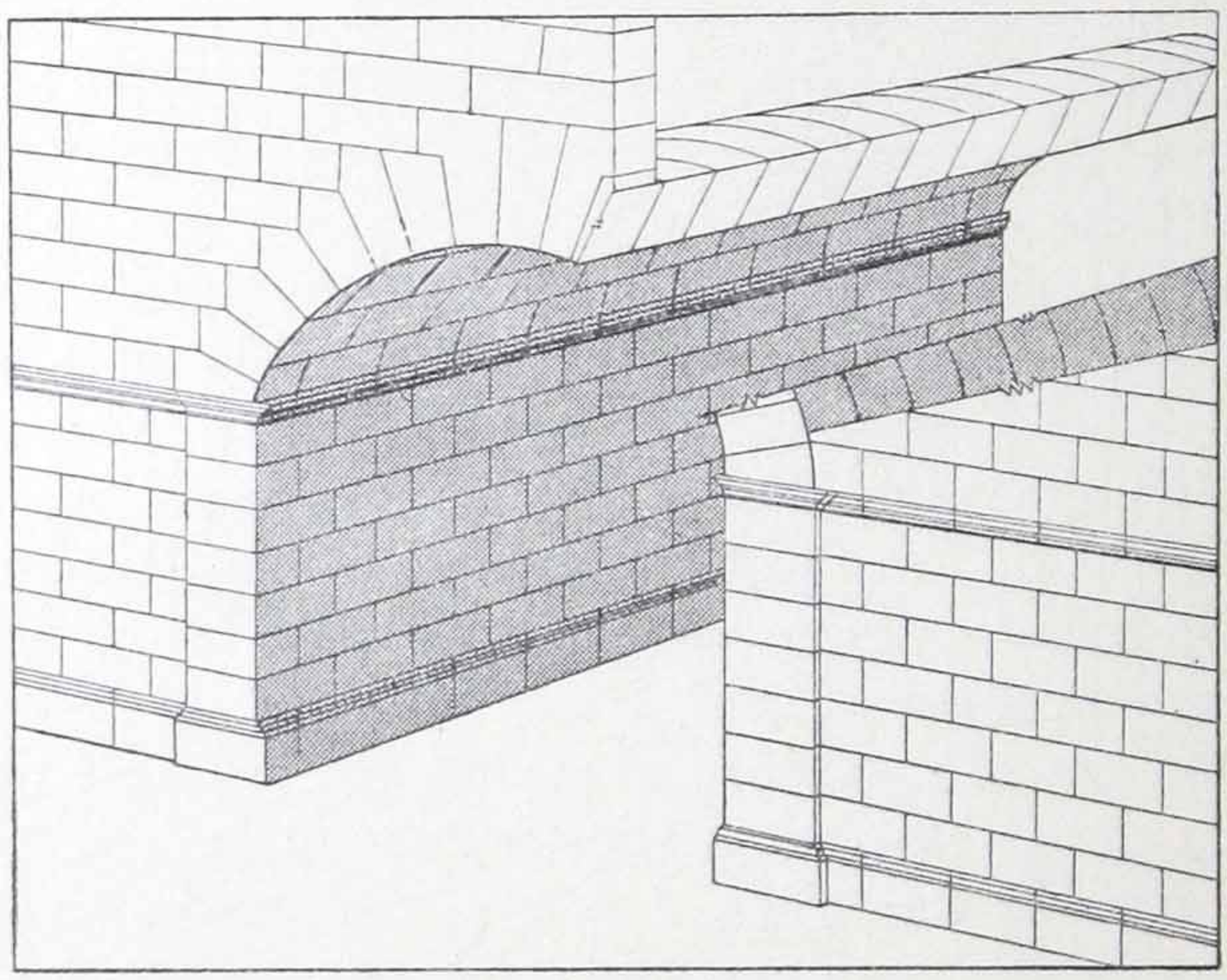


FIG. 1. — Bóveda de mampostería. Las cargas se transmiten directamente a los muros.

continuas, lo que ha permitido la construcción de bóvedas y cúpulas de ínfimos espesores, cubriendo enormes superficies libres.

En contraposición con las bóvedas de mampostería anteriormente conocidas, en las cuales se consideraba la repartición de las cargas únicamente sobre la sección transversal y su descarga a muros o pies de fundación, se ha estudiado el efecto de viga que puede constituir una bóveda apoyada en dos tímpanos rígidos, permitiendo así la utilización del concepto monolítico, al su-

poner a toda la bóveda trabajando en conjunto y transmitiendo los esfuerzos únicamente a dichos tímpanos verticales.

Aun cuando la construcción de estos elementos delgados y la teoría de las membranas en la que se basa su cálculo no es exclusiva del hormigón armado, pues los constructores de elementos metálicos han empleado los mismos principios para la construcción de tanques, calderas, fondos de buques, submarinos, etc., debemos consignar que el hormigón se presta mejor que el

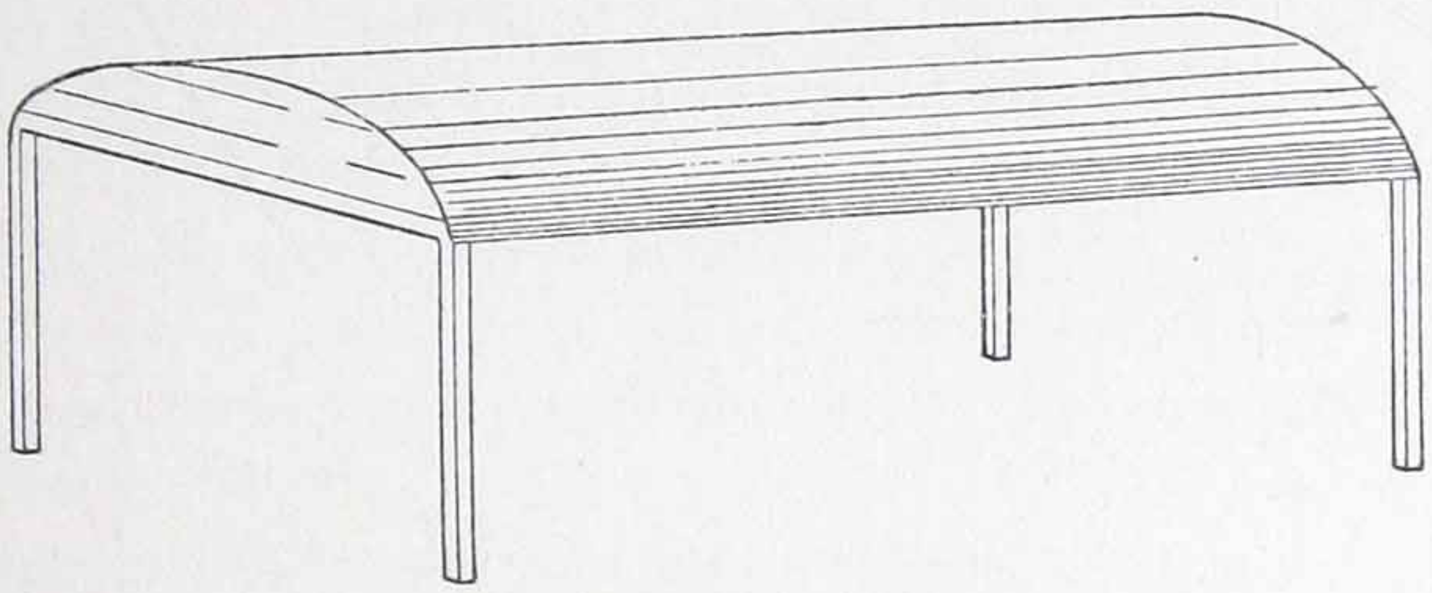


FIG. 2. — Bóveda apoyada en dos tímpanos rígidos.

hierro a la ejecución de superficies curvas, porque puede adoptar cualquier forma al moldearse, debido a su constitución especial.

Dado el interés que este tipo de construcciones ha despertado últimamente entre nuestros técnicos, creemos suficientemente justificada esta publicación, donde se han reunido los elementos fundamentales de la teoría de las membranas, en la que se basa el cálculo de las bóvedas autoportantes.

HIPÓTESIS FUNDAMENTALES

Para el establecimiento de las ecuaciones fundamentales que resuelven el problema, es necesario recurrir a la teoría de la elasticidad. Evidentemente la teoría de la resistencia de materiales no da elementos suficientes para estudiar este tipo de estructuras, ya que su forma no autoriza a establecer la hipótesis de Navier de la conservación de las secciones planas y tratar a la estructura como si fuese una viga simplemente apoyada de sección especial.

Es necesario pues establecer un paralelepípedo elemental, estudiar sus condiciones de equilibrio, plantear la ecuación diferencial resultante e integrarla. Las condiciones de borde permiten establecer los límites de integración.

Antes de establecer las ecuaciones fundamentales haremos una ligera referencia a todos los casos posibles de equilibrio de losas y placas.

Losa plana

El equilibrio de una losa plana se establece suponiendo que su espesor h no puede despreciarse con respecto a sus otras dimensiones, pero que sus deformaciones son, en cambio, pequeñas con respecto a ese espesor.

Si se considera un elemento de losa plana sometido a una carga vertical q, en la que se supone incluído el peso propio, el estado de cargas a que está sometido el elemento será el de la figura 3 y la ecuación diferencial que expresa su equilibrio estará dada por la siguiente expresión:

$$\frac{\delta^2 M_x}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 M_y}{\delta y^2} - 2\frac{\delta^2 M_{xy}}{\delta x\, \delta y} = -q \qquad [1]$$

Considerando las posibles condiciones de borde se puede integrar la ecuación [1] haciendo intervenir el factor de rigidez de la placa y obtener las soluciones particulares de cada caso.

Este problema ha sido perfectamente resuelto con las ecuaciones aproximadas de Marcus para los casos más comunes y tabuladas en su mayor parte (losas con armaduras cruzadas, *pilz decke)*.

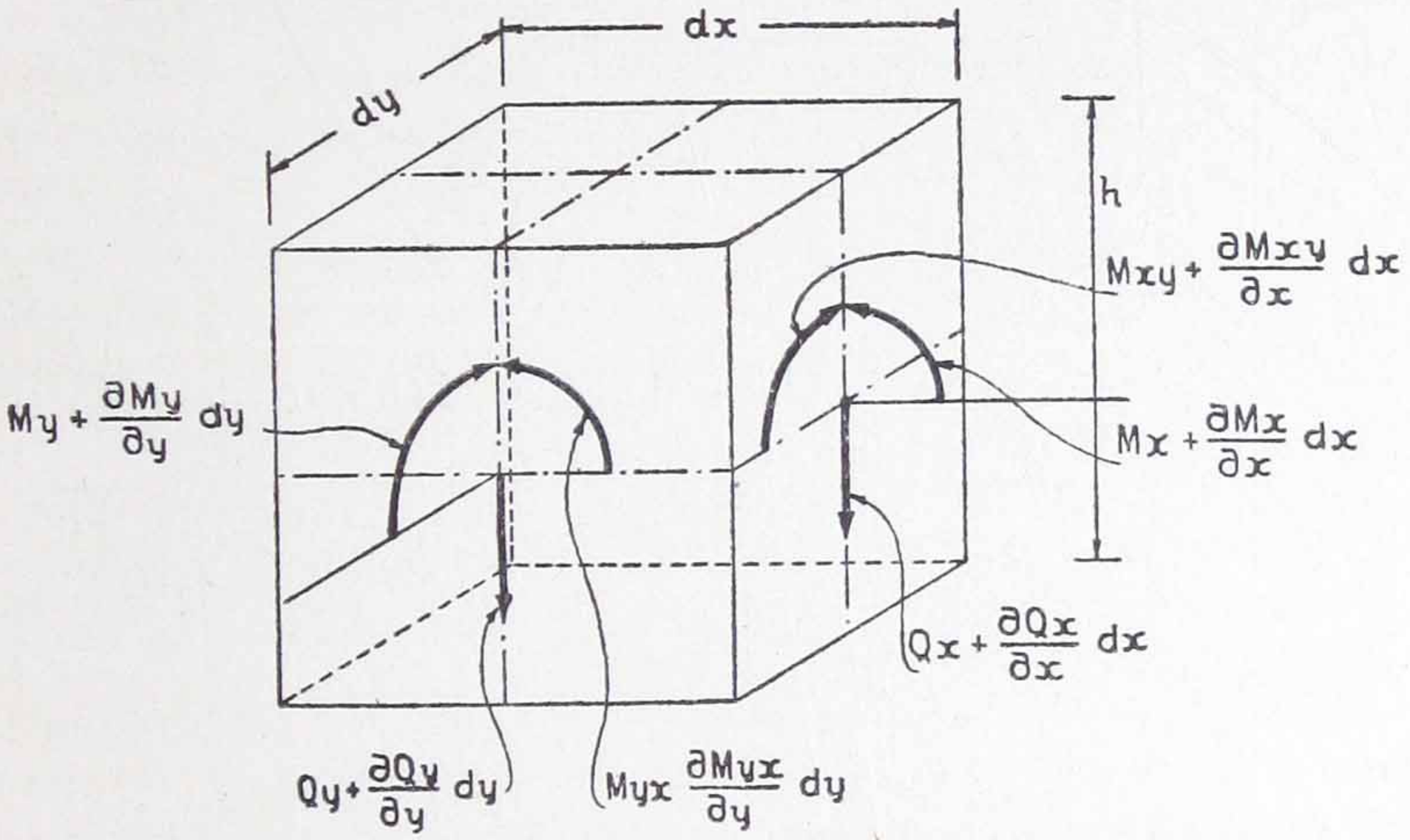


FIG. 3. — Equilibrio de la losa plana. Estado I.

Placa con grandes deformaciones

Si la losa se considera con menor espesor y tiene grandes deformaciones, ya no es posible prescindir de éstas y es necesario, además del estado anterior, considerar el nuevo conjunto de fuerzas representado en la figura 4, que actúan en el medio de la placa.

La ecuación diferencial que expresará el equilibrio de la placa para el nuevo estado de cargas I y II, será la siguiente:

$$\frac{\delta^2 M_x}{\delta x^2} - 2\frac{\delta^2 M_{xy}}{\delta x\,\delta y} + \frac{\delta^2 M_y}{\delta y^2} = -\left(q + N_x\frac{\delta^2 w}{\delta x^2} + N_y\frac{\delta^2 w}{\delta y^2} + 2N_{xy}\frac{\delta^2 w}{\delta x\,\delta y}\right). \quad [2]$$

Esta ecuación diferencial resuelve los problemas en los que la deformación es grande y ha sido integrada para algunas condiciones de borde.

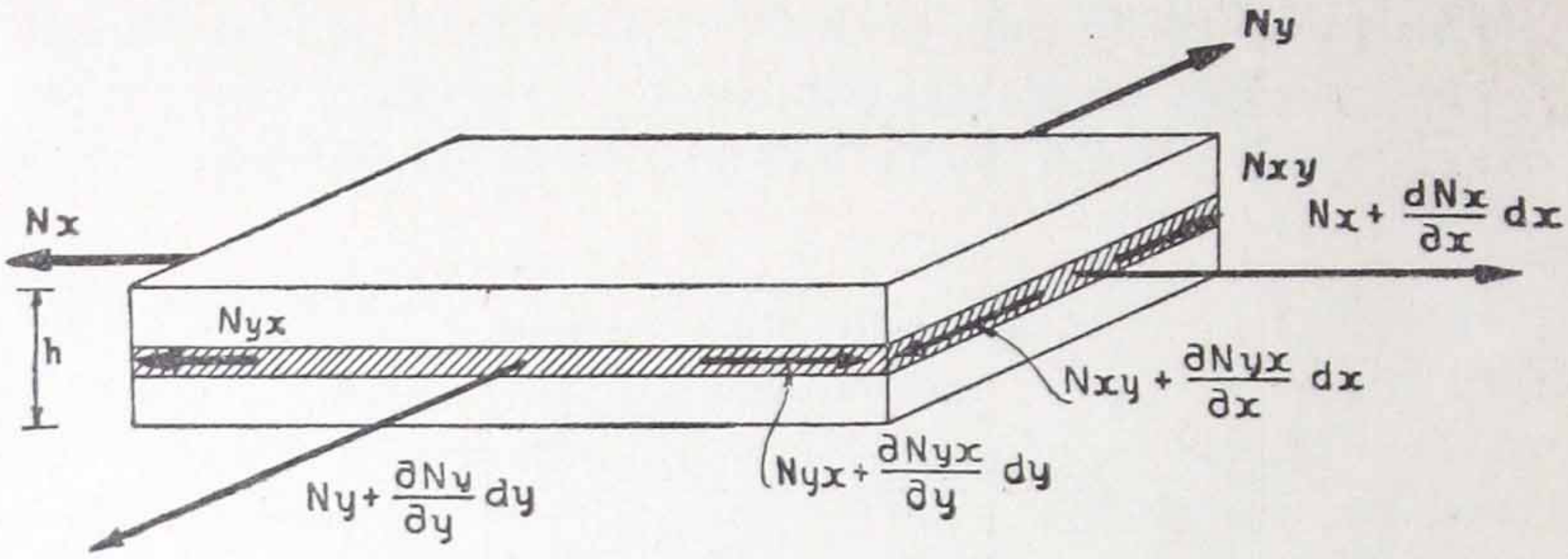


FIG. 4 — Equilibrio de la losa plana. Estado II.

Se aplica para casos de placas delgadas, fondos de buques, vigas de gran altura, tanques empotrados, etc.

Si en lugar de tener una superficie plana se tiene una superficie cualquiera, en cada punto habrá dos radios de curvatura R_α y R_β y las fuerzas que actúan y los momentos estarán representados por las siguientes expresiones:

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz \qquad N_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_y \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz$$

$$N_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz \qquad N_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{yx} \left(1 - \frac{z}{r_z}\right) dz \qquad [3]$$

$$Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xz} \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz \qquad Q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{yz} \left(1 - \frac{z}{r_z}\right) dz$$

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x z \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz \qquad M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_y z \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz$$

$$M_{xy} = -\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} z \left(1 - \frac{\cdot}{r_y}\right) dz \qquad M_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{yx} z \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz \qquad [4]$$

Las pequeñas cantidades $\frac{z}{r_x}$ $\frac{z}{r_y}$ pueden despreciarse debido a que el espesor es pequeño con respecto al radio de curvatura, por lo que se puede escribir:

$$N_{xy} = N_{yx} \quad \text{y} \quad M_{xy} = M_{yx}$$

Membranas sin flexión

Si el espesor h es muy pequeño con respecto a las otras dimensiones, puede considerarse que los esfuerzos se reparten uniformemente en todo el espesor.

Un ejemplo clásico estaría dado por un cilindro, de espesor pequeño, y que contuviera un líquido o gas a presión. Bajo la acción de esta presión interna la pared puede considerarse como sometida a un esfuerzo distribuído sobre su espesor. Si los extremos del cilindro están empotrados, la membrana no podrá expandirse en estas regiones y deberán producirse momentos flectores en las cercanías de esos extremos. Un análisis más completo nos mostraría que esta flexión tiene un carácter exclusivamente local y que la parte de la membrana situada a una pequeña distancia de los extremos permanece cilíndrica y soporta únicamente tensiones en el medio de su espesor, sin una flexión apreciable.

En este caso el problema se simplifica enormemente, ya que los momentos flectores y esfuerzos de corte desaparecen y el equilibrio de la membrana puede estudiarse únicamente tomando en cuenta las fuerzas N_x, N_y y N_{xy}.

Este caso es estáticamente determinado, ya que las tres fuerzas pueden calcularse mediante las tres ecuaciones de equilibrio que nos da la estática.

A las fuerzas N_x, N_y y N_{xy} obtenidas en esta forma se les llama *fuerzas de membrana* y la teoría de las estructuras basadas en esta hipótesis de la inexistencia de las tensiones de flexión se llama la *teoría de las membranas.*

TEORÍA DE LAS MEMBRANAS

Las membranas que tienen la forma de superficies de revolución se aplican en numerosas construcciones, como tanques, cúpulas, bóvedas de cañón corrido, etc.

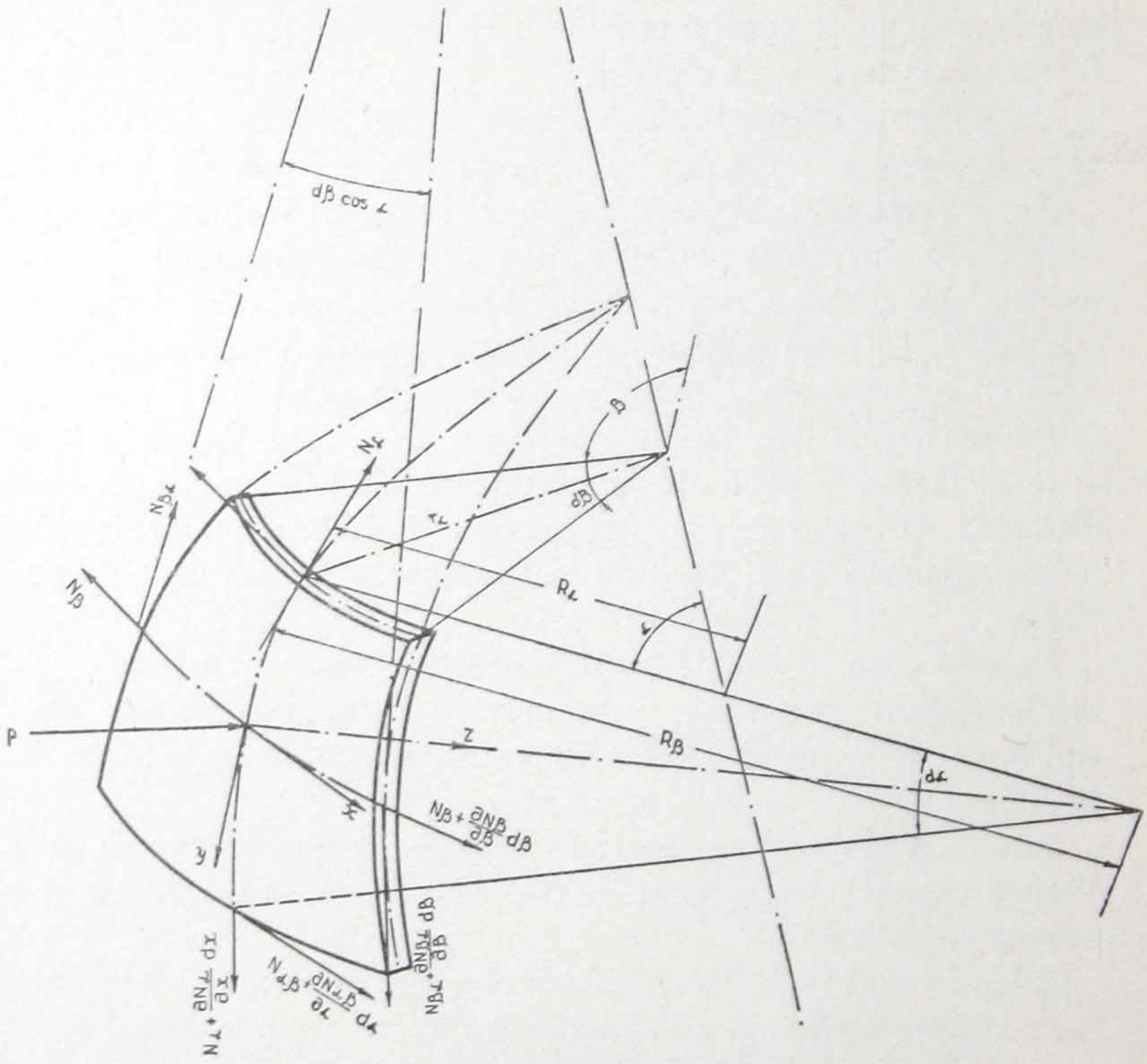
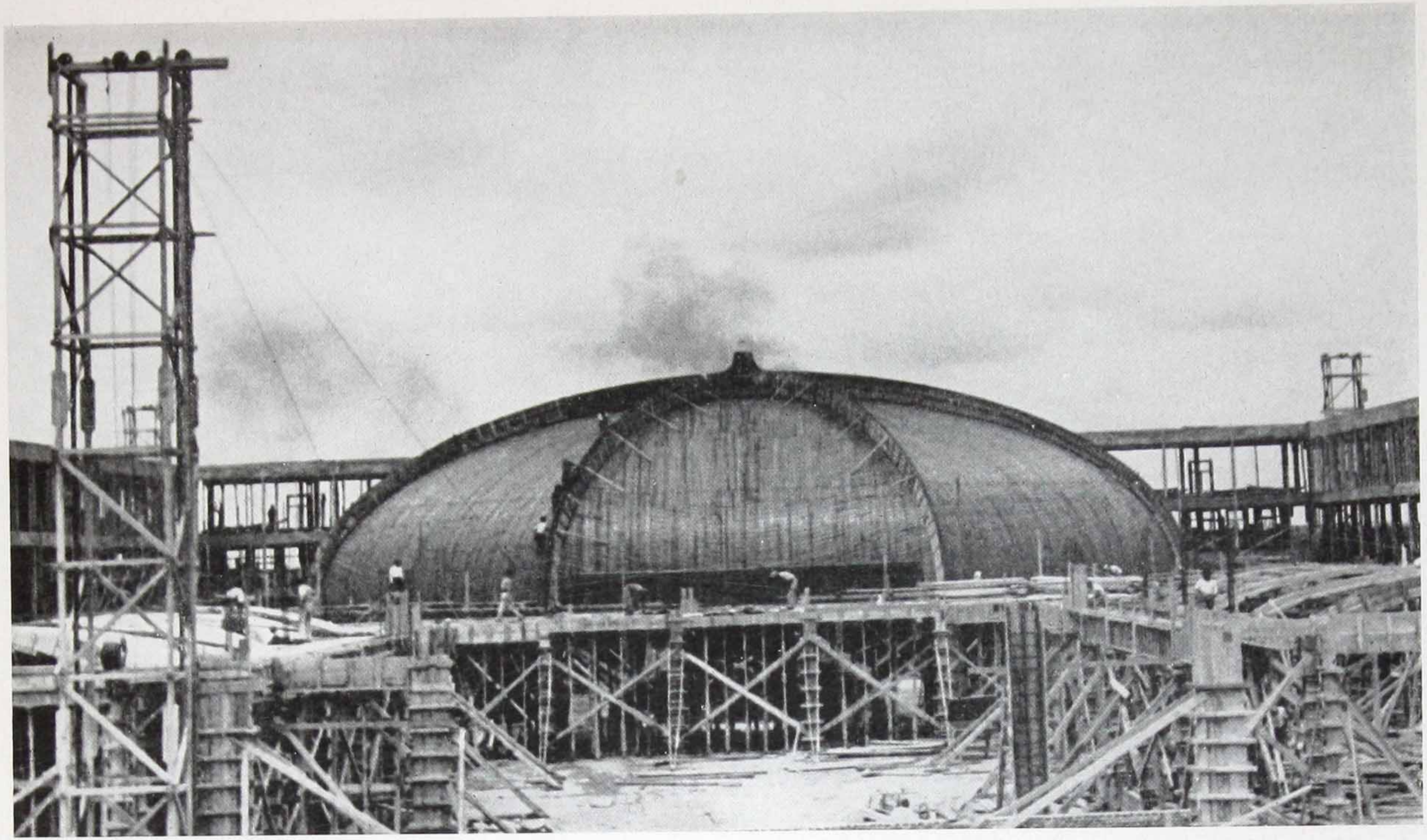


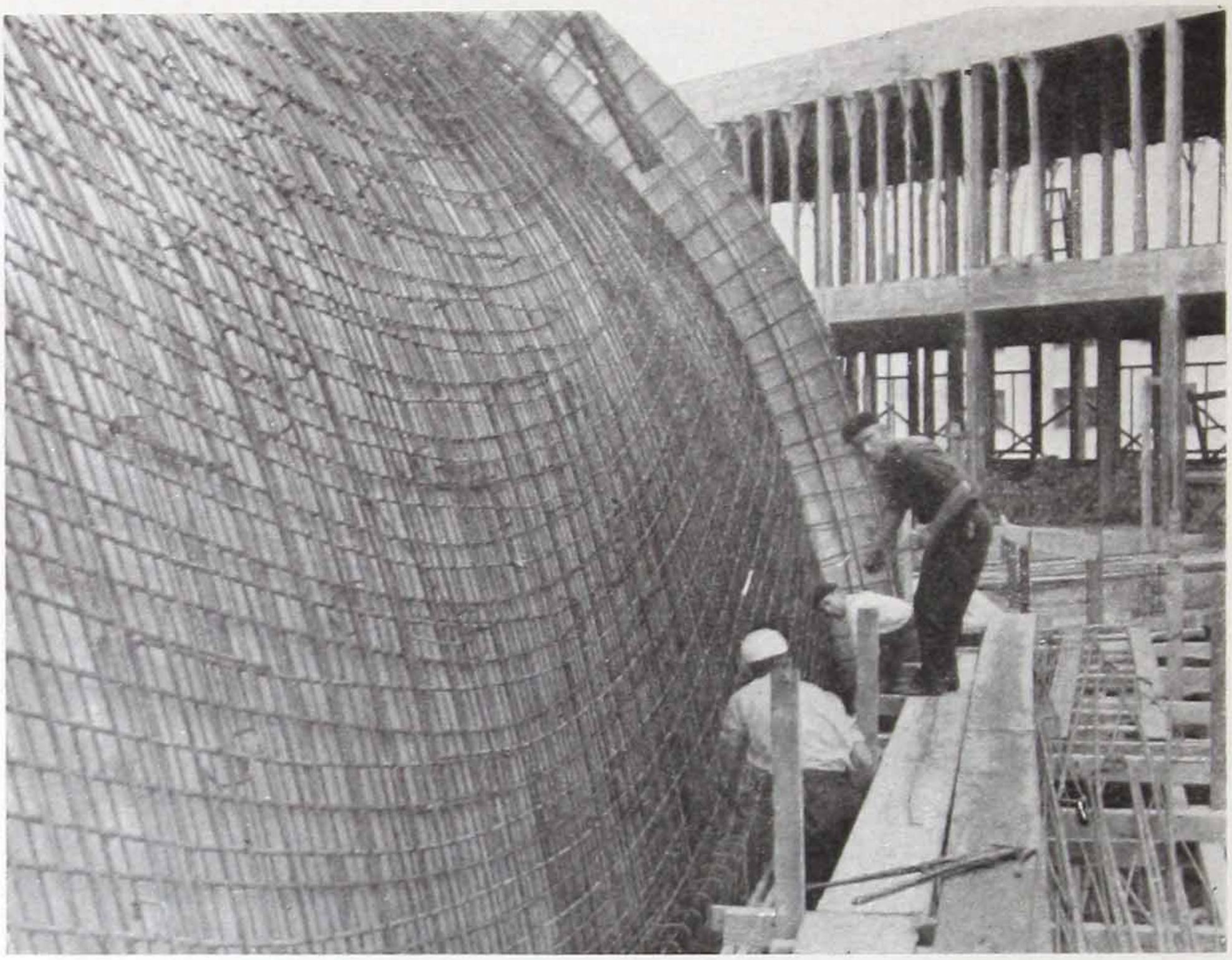
FIG. 5. — Equilibrio de las membranas.

Una superficie de revolución se obtiene por la rotación de una curva plana alrededor de un eje. Esta curva se llama meridiana y el plano en que está contenida, plano meridiano.

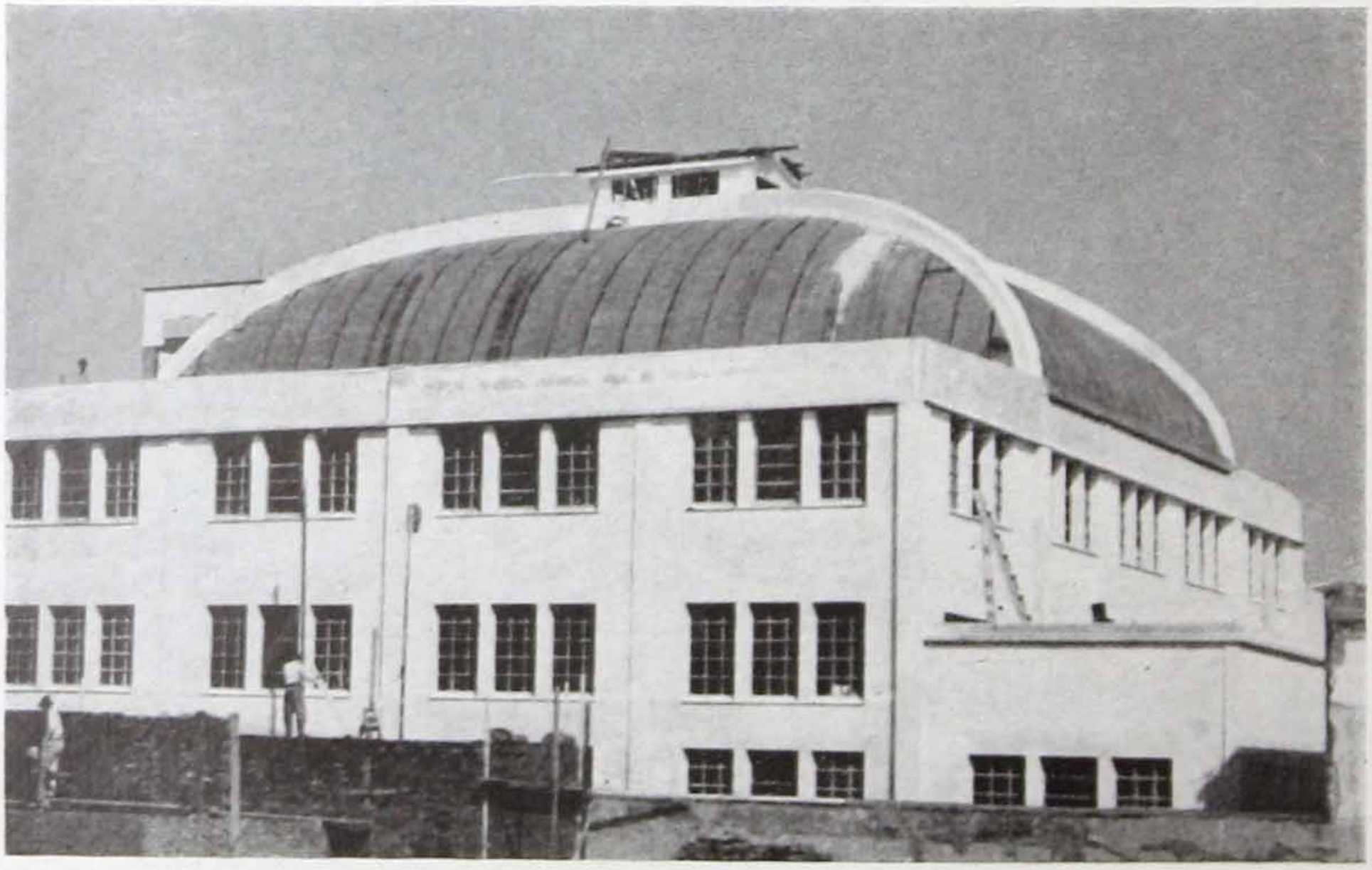


Cúpula de la Escuela Naval Militar, en Río Santiago. Planta cuadrada, 36 × 36 m; altura 15,50 m.

Arquitectos Jacobs y Giménez. Ingeniero consultor A. D. Gallo. Empresa constructora Polledo Hnos. y Cía.



Colocación de la armadura de la cúpula de la Escuela Naval Militar.



Fábrica de la firma De Los Santos y Cía., en Avellaneda 1835, Capital Federal. Bóveda de 15 × 22 m; altura 16 m.

Empresa constructora Gallo, Berg y Cía.

Si se corta un elemento de la membrana entre dos meridianos adyacentes y dos planos próximos paralelos, tendremos el elemento de la figura 5.

La posición de un meridiano está definida por el ángulo β medido desde un plano meridiano origen y la posición del paralelo por un ángulo α formado por la perpendicular a la tangente en ese punto y el eje de rotación.

En cada punto tendremos por consiguiente dos radios de curvatura R_α y R_β y el círculo paralelo tendrá un radio r_α. Los lados del elemento de la figura tendrán los valores $ds_\alpha = r_\alpha d\beta$ y $ds_\beta = R_\beta d\alpha$ y la superficie elemental será por consiguiente

$$dF = ds_\alpha \cdot ds_\beta = r_\alpha \, d\beta \cdot R_\beta d\alpha, \qquad r_\alpha = R_\alpha sen_{\ \alpha}$$

Una fuerza P que actúa sobre el elemento puede descomponerse en tres componentes p_x, p_y, p_z tangentes y perpendiculares al elemento.

A las fuerzas que actúan en el elemento las llamaremos

$$N_\alpha, \ N_\beta \ \text{y} \ N_{\alpha\beta}$$

Proyectando sobre cada uno de los ejes se obtienen las ecuaciones que establecen el equilibrio de la membrana:

a) $$\frac{\delta N_\beta}{\delta \beta} d\beta \cdot R_\beta d\alpha + N_{\alpha\beta} \cdot R_\beta d\alpha \cdot d\beta$$

$$+ \frac{\delta}{\delta \alpha} (N_{\alpha\beta} \cdot r_\alpha d\beta) d\alpha + p_x \cdot r_\alpha d\beta \cdot R_\beta d\alpha = 0,$$

[5]

b) $$\frac{\delta}{\delta \alpha} (N_\alpha \cdot r_\alpha d\beta) d\alpha - N_\beta \cdot R_\beta d\alpha \cdot d\beta \cdot cos_{\ \alpha}$$

$$+ \frac{\delta N_{\alpha\beta}}{\delta \beta} d\beta R_\beta d\alpha + p_y \cdot r_\alpha d\beta \cdot R_\beta d\alpha = 0,$$

c) $$\mathrm{N}_\alpha \cdot r d\beta \cdot d\alpha + N_\beta \cdot R_\beta d\alpha \cdot d\beta \cdot \operatorname{sen} \alpha$$

$$+ p_z \cdot r_\alpha d\beta \cdot R_\beta d\alpha = 0.$$

BÓVEDAS Y CAÑOS AUTOPORTANTES

Una aplicación interesante de la teoría de las membranas es el cálculo de las bóvedas autoportantes.

Las bóvedas autoportantes presentan una gran variedad de formas y disposiciones y sirven para cubrir grandes luces sin columnas, prestando su mayor utilidad en hangares y fábricas, cuya estructura puede ser resuelta así con gran economía.

Antes, el espesor medio de una bóveda no era inferior a 10 cm, mientras que ahora es posible cubrir superficies de 1.000 m^2 con bóvedas de 5 cm de espesor.

El estudio de las flechas medidas durante el descimbrado, ha permitido conocer el fenómeno del pandeo de estas bóvedas y determinar los valores límites para los cuales el equilibrio se vuelve inestable.

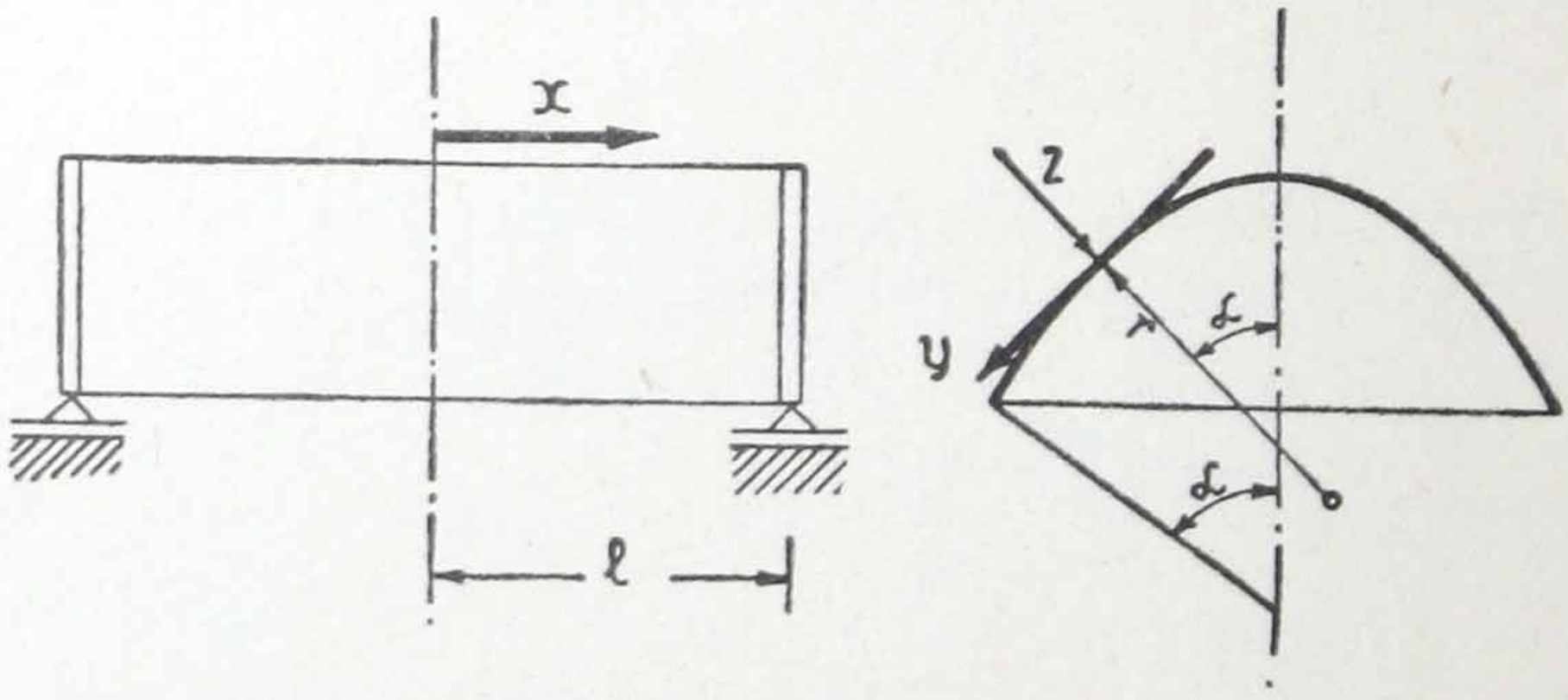


FIG. 6. — Bóveda autoportante.

La disminución del volumen de hormigón, además de constituir una economía de material, conduce al mismo tiempo a una economía real de los encofrados y apuntalamientos que constituyen para este tipo de estructuras uno de los ítem que más inciden sobre el costo total.

Las bóvedas autoportantes están apoyadas, como puede verse en la figura, en sus dos tímpanos, trabajando todo el conjunto como si fuese una viga soportada entre sus dos elementos rígidos.

Ecuaciones fundamentales

Partiremos de las ecuaciones generales [5], en las que uno de los radios se hace infinito y por consiguiente:

$$d\beta = \mathrm{d}x \qquad N_\beta = N_x \qquad N_{\alpha\beta} = \mathrm{N}_{\alpha x}$$

Las ecuaciones serán las siguientes:

$$\frac{\delta N_x}{\delta x}\, dx\, r\, d\alpha + \frac{\delta N_{x\alpha}}{\delta \alpha}\, d\alpha dx + p_x dx\, r\, d\alpha = 0,$$

$$\frac{\delta N_\alpha}{\delta \alpha}\, d\alpha\, dx + \frac{\delta N_{x\alpha}}{\delta x}\, dx\, r\, d\alpha + p_y dx\, r\, d\alpha = 0, \qquad [6]$$

$$N_\alpha dx\, d\alpha + p_z dx\, r\, d\alpha = 0,$$

Simplificando tendremos:

$$\frac{\delta N_{x\alpha}}{\delta x} + \frac{1}{r}\frac{\delta N_\alpha}{\delta \alpha} + p_y = 0, \quad \frac{\delta N_x}{\delta x} + \frac{\delta N_{x\alpha}}{r\delta \alpha} + p_x = 0, \quad \mathrm{N}_\alpha + p_z r = 0. \quad [7]$$

FIG. 7. — Equilibrio de la bóveda autoportante.

El espesor h es constante y la carga p una función continua de x y α expresada en función de sus componentes p_x, p_y, p_z.

Las fuerzas longitudinales pueden expresarse independientemente en la siguiente forma:

$$N_\alpha = -rp_z,$$

$$N_{x\alpha} = -\int \frac{1}{r}\frac{\delta N_\alpha}{\delta \alpha}\,dx - \int p_y dx + C_1(\alpha), \qquad [8]$$

$$N_x = -\int \frac{1}{r}\frac{\delta N_{x\alpha}}{\delta \alpha}\,dx - \int p_x dx + C_2(\alpha).$$

La sección transversal de una bóveda autoportante es una curva plana y sus bordes paralelos $\alpha^* = \alpha =$ constante.

Al integrar las fórmulas [8] tendrán la forma:

$$N_\alpha = -p_z r,$$

$$N_{x\alpha} = -\left(p_y + \frac{1}{r}\frac{\delta N_\alpha}{\delta \alpha}\right)x + C_1(\alpha), \qquad [9]$$

$$N_x = \frac{1}{r}\frac{\delta}{\delta \alpha}\left(p_y + \frac{1}{r}\frac{\delta N_\alpha}{\delta \alpha}\right)\frac{x^2}{2} - \frac{1}{r}\frac{\delta C_1(\alpha)}{\delta \alpha} + C_2(\alpha).$$

Las condiciones de borde nos permiten calcular las constantes de integración.

Si suponemos una bóveda simplemente apoyada y los ejes de coordenadas en el centro de la bóveda (fig. 6), para $x = 0$ el esfuerzo de corte $N_{\alpha x}$, por razones de simetría, debe ser nulo en toda la sección; luego $N_{\alpha x} = 0$ y $C_{1\alpha} = 0$.

Por estar simplemente apoyada en los bordes $x = \pm l$ debe también tenerse $N_x = 0$ y por consiguiente:

$$x = 0: \qquad N_{\alpha x} = 0 \quad \text{y} \quad C_1(\alpha) = 0,$$

$$x = \pm l: \qquad N_x = 0 \quad \text{y} \quad C_2(\alpha) = -\frac{1}{r}\frac{\delta}{\delta \alpha}\left(p_y + \frac{1}{r}\frac{\delta N_\alpha}{\delta \alpha}\right)\frac{l^2}{2}.$$

Para efectuar cómodamente la integración de la ecuación el radio de curvatura de la sección transversal puede escribirse en la siguiente forma:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a\,cos^{n}\,\alpha}$$

El parámetro n determina la forma de la curva de modo que para $n = 3$, la ecuación representa una parábola; para $n = 2$ una catenaria; para $n = 0$ un círculo y para $n = -1$ una cicloide.

Para cargas uniformemente repartidas se tiene:

$$p_x = 0, \quad p_y = -g\,sen\,\alpha, \quad p_z = g\,cos\,\alpha$$

luego se pueden escribir las ecuaciones [5] como sigue:

$$N_\alpha = -\frac{ga}{cos^{n-1}\alpha},$$

$$N_{x\alpha} = -gx\,(2-n)\,sen\,\alpha, \qquad [10]$$

$$N_x = -g\,\frac{(2-n)}{a}\,cos^{n+1}\alpha\,\frac{l^2}{2}\left(1-\frac{x^2}{l^2}\right)$$

En estas fórmulas puede observarse que si en el borde libre se tiene tangente vertical, es decir $\alpha^* = 90°$ (caso del círculo o de la elipse) el valor N_α se anula. El valor $N_{\alpha x}$ por el contrario no se anula como debiera suceder para un borde libre.

Esta condición concerniente a los esfuerzos de corte no se cumple pues las fórmulas son exactas, dado su planteo, únicamente para un cilindro cerrado. En las aplicaciones prácticas se supone que las fuerzas $N_{x\alpha}$ son absorbidas y transmitidas a los tímpanos por refuerzos longitudinales.

La fuerza total S que deben absorber estos refuerzos estará dada por la expresión:

$$S = -\left(p_y + \frac{1}{r}\,\frac{\delta N_\alpha}{\delta\alpha}\right)\int x\,dx = \left(p_y + \frac{1}{r}\,\frac{\delta N_\alpha}{\delta\alpha}\right)\left(\frac{l^2-x^2}{2}\right) \qquad [11]$$

La presencia de estos elementos de perturbación modifica necesariamente el estado de membrana en las inmediaciones de la viga de borde, introduciendo momentos flectores y esfuerzos

de corte que han sido supuestos nulos en el planteo de la teoría.

De acuerdo con la experiencia puede, sin embargo, suponerse con bastante aproximación el estado de la membrana en este tipo de bóveda mientras la luz no sea demasiado grande con respecto al ancho de la bóveda. Timoshenko (2) aconseja no adoptar valores de $2l \leq 2a$, siendo l la semiluz y a el semiancho de la bóveda. Sin embargo, se han pasado estos límites adoptándose para la teoría de las membranas hasta luces dobles de la relación anterior, sin que se haya producido ningún inconveniente.

En el caso de adoptar luces mayores o de establecer otros tipos de bóvedas de superficies discontinuas, es necesario plantear el problema de la introducción de los momentos flectores y considerarlos simultáneamente con el estado de membrana.

Del planteo de esta teoría nos ocuparemos más adelante.

Fórmulas para el cálculo

Las fórmulas planteadas, con las limitaciones establecidas, pueden servir para el cálculo de las bóvedas independientes y simplemente apoyadas en tímpanos rígidos.

Como por comodidad de construcción y por tener tangentes verticales en los apoyos ha sido comúnmente empleada la elipse como sección transversal de dichas bóvedas, vamos a establecer las fórmulas que la resuelven acompañando un ejemplo para mayor claridad en la exposición.

Para poder trabajar con las fórmulas es necesario establecer los valores del radio de curvatura de la elipse en función del ángulo que forma con la vertical.

$$r = \frac{a^2 b^2}{(a^2 sen^2 \alpha + b^2 cos^2 \alpha)^{3/2}}$$

que podemos escribir en la siguiente forma:

$$r = \frac{q^3}{ab}$$

siendo q el radio conjugado

$$q = \frac{ab}{(a^2 sen^2 \alpha + b^2 cos^2 \alpha)^{1/2}}$$

(2) TIMOSHENKO: *Plates and Shells*, pág. 388. Nueva York-Londres, 1940.

1) Peso propio

$$p_y = g\cos\alpha\,,\ p_z = g\,sen\,\alpha\,,\ p_x = 0$$

$$N\alpha = -\,g\cos\alpha\,\frac{a^2b^2}{(a^2\,sen^2\alpha + b^2\cos^2\alpha)^{3/2}}$$

$$\frac{\delta N_\alpha}{r\delta\alpha} = -\,g\,\frac{a^2b^2}{r}\Big[-\,sen\,\alpha(a^2\,sen^2\alpha + b^2\cos^2\alpha)^{3/2} - \qquad [12]$$

$$-\cos\alpha\,\frac{3}{2}\Big(a^2\,sen^2\alpha + b^2\cos^2\alpha\Big)^{-5/2}\,2\,sen\,\alpha\cdot\cos\,(a^2 - b^2)\Big]$$

Llamando $e^2 = (a^2 - b^2)$ e introduciendo al valor de r tendremos:

$$\frac{\delta N_\alpha}{r\delta\alpha} = g\,sen\,\alpha\Big[1 + 3e^2\cos^2\alpha\Big(a^2\,sen^2\alpha + b^2\cos^2\alpha\Big)^{-1}\Big]$$

$$N_{x\alpha} = \Big(g\,sen\alpha + \frac{\delta N\alpha}{r\delta\alpha}\Big)x = g\,sen\,\alpha\Big[2 + 3e^2\cos^2\alpha\,(a^2\,sen^2\alpha + b^2\cos^2\alpha)^{-1}\Big]$$

$$\frac{\delta N_{\alpha x}}{r\delta\alpha} = \frac{1}{r}\,g\cos\alpha\Big[\,2 + 3e^2\cos^2\alpha\,(a^2\,sen^2\alpha + b^2\cos^2\alpha)^{-1}\Big] + \qquad [13]$$

$$+\frac{1}{r}\,g\,sen\alpha\Big[-\,3e^2\Big(a^2 + b^2\Big)^{-2}\,2a^2\,\frac{1}{\cos^2\alpha}\Big]$$

Los valores de los tres componentes de la tensión serán por consiguiente:

$$N_\alpha = -\,g\cos\alpha\,\frac{q^3}{ab}$$

$$N_{\alpha x} = -\,xg\,sen\,\alpha\Big[2 + \frac{3e^2q^2\cos^2\alpha}{a^2b^2}\Big] \qquad [14]$$

$$N_x = -\,g\,\frac{l^2 - x^2}{2}\cos\alpha\Big[\frac{2ab}{q^3} + \frac{3e^2}{abq}\cdot\Big(\cos^2\alpha - 2\,\frac{q^2}{b^2}\,sen^2\alpha\Big)\Big]$$

Hemos dicho ya, y puede verse en las fórmulas [10], que $N_{\alpha x}$ no se anula en el borde, siendo pues necesario introducir un

tensor a todo lo largo de dicho borde para que absorba el esfuerzo de tracción no equilibrado. El esfuerzo total será:

$$S = \int_o^l N_{\alpha x} dx$$

pero en el borde $\alpha = 90°$ y por consiguiente $q = b$

$$N_{x\alpha}{}^* = 2gx$$

$$S = \int_o^l 2gx dx = \frac{2gl^2}{2} = gl^2 \qquad [15]$$

El esfuerzo de tracción es pues directamente proporcional al cuadrado de la semiluz libre ([3]).

2) Sobrecargas

Además del peso propio sobre una cubierta pueden actuar sobrecargas de viento y sobrecargas de nieve.

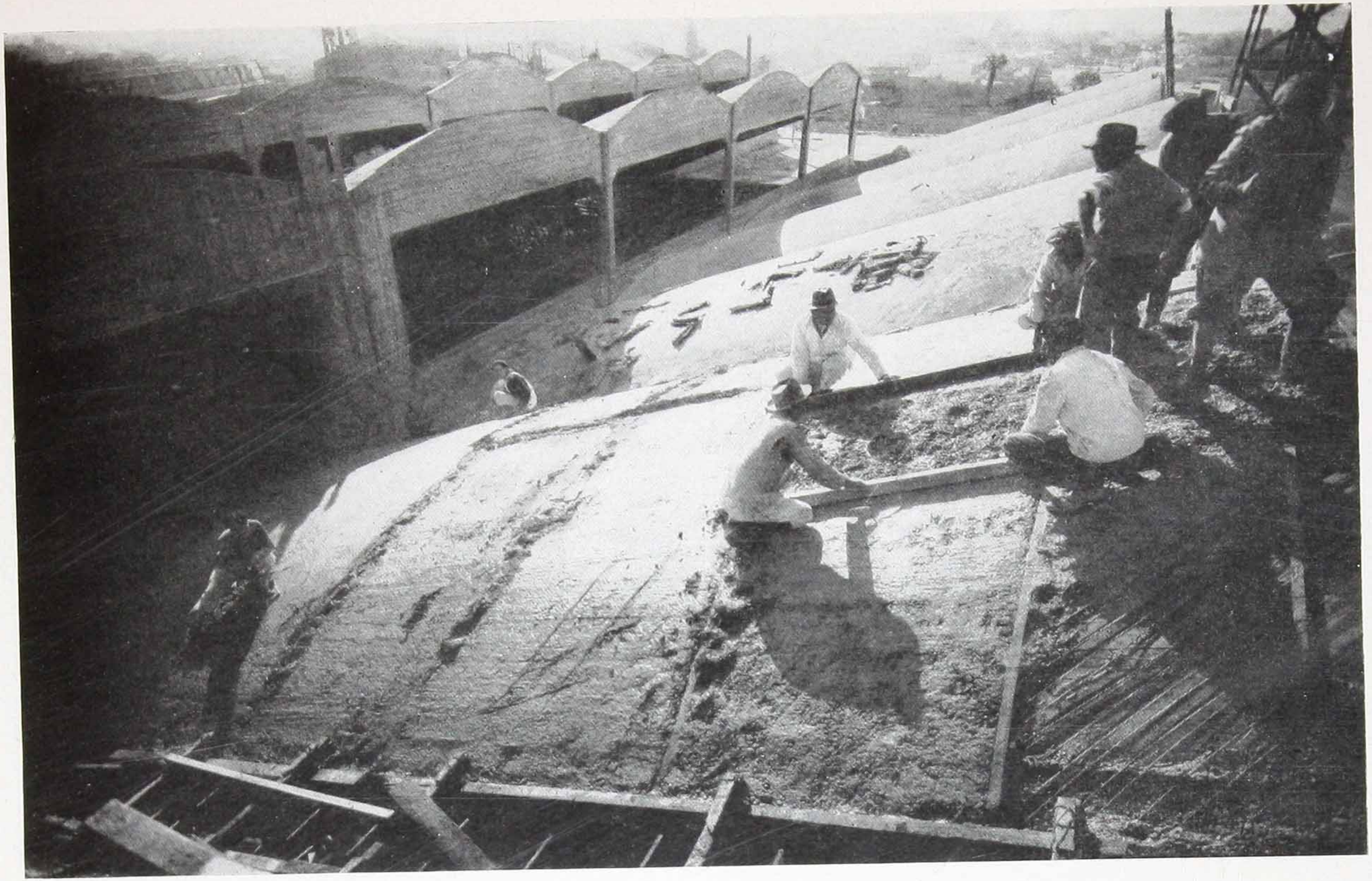
Las primeras producen cargas disimétricas y su estudio ha sido el objeto de numerosos trabajos. No entraremos en detalles que podrán estudiarse en la literatura especial.

Las normas corrientes, al tomar en consideración el efecto del viento, suponen sobrecargas más o menos grandes que inciden, evidentemente, sobre el cálculo de las cubiertas, aumentando la sección necesaria.

Se ha llegado sin embargo, en base a estudios hechos en túneles aerodinámicos, a la conclusión de que sobre las cubiertas de hangares o fábricas con grandes luces, no se producen exclusivamente presiones a causa del viento, sino que además se originan depresiones que siguen leyes más o menos complejas de acuerdo con la forma de la cubierta.

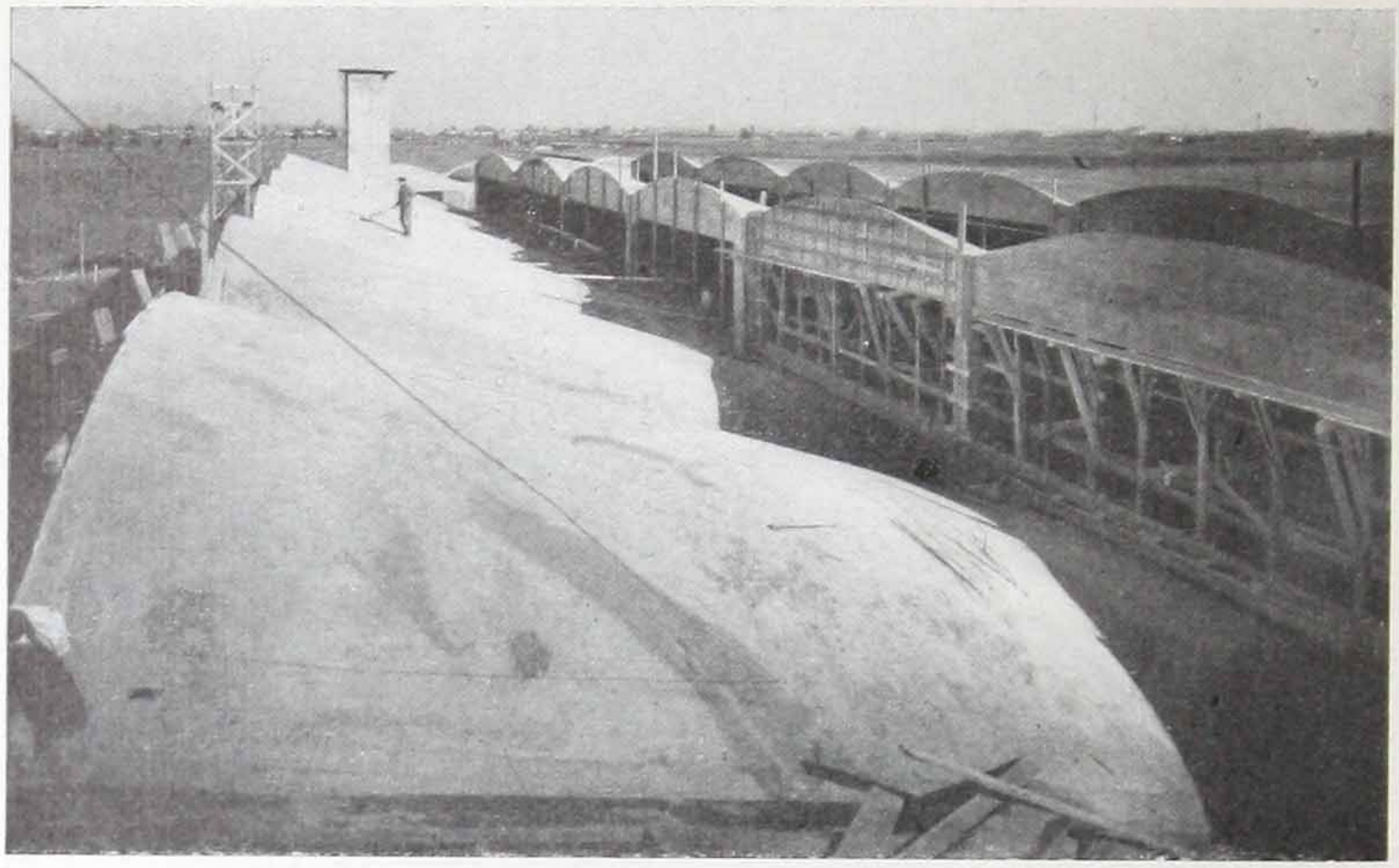
---

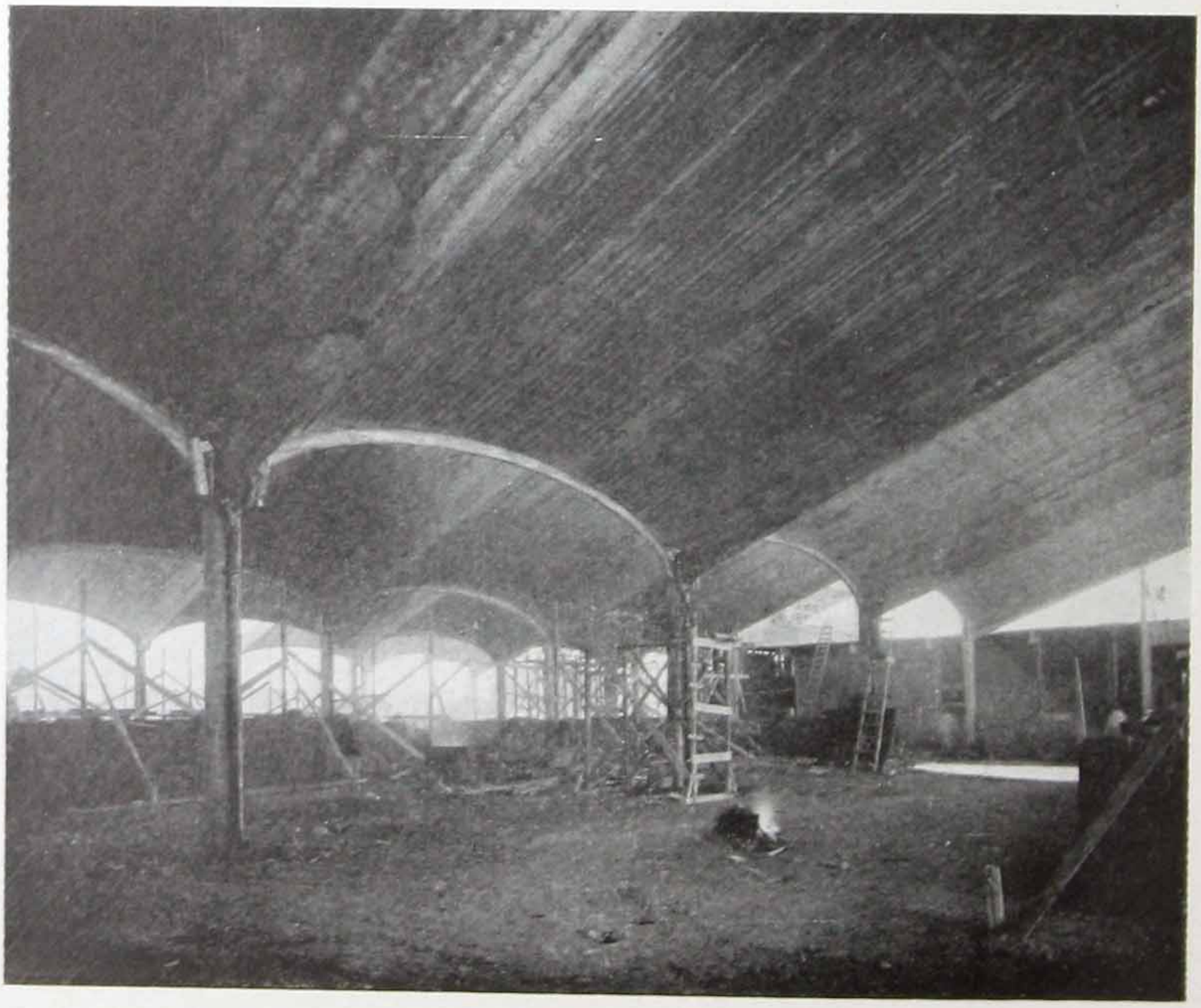
(3) Parecería a primera vista una contradicción que la cantidad de hierro necesaria para absorber el esfuerzo de tracción de las bóvedas no dependa de su altura, acostumbrados a que en las vigas es función de ella. Del planteo de la teoría y observando que el tensor representa la parte de la bóveda inferior que se supone existente en el planteo de las ecuaciones fundamentales, vemos que evidentemente sólo puede ser función de la longitud.



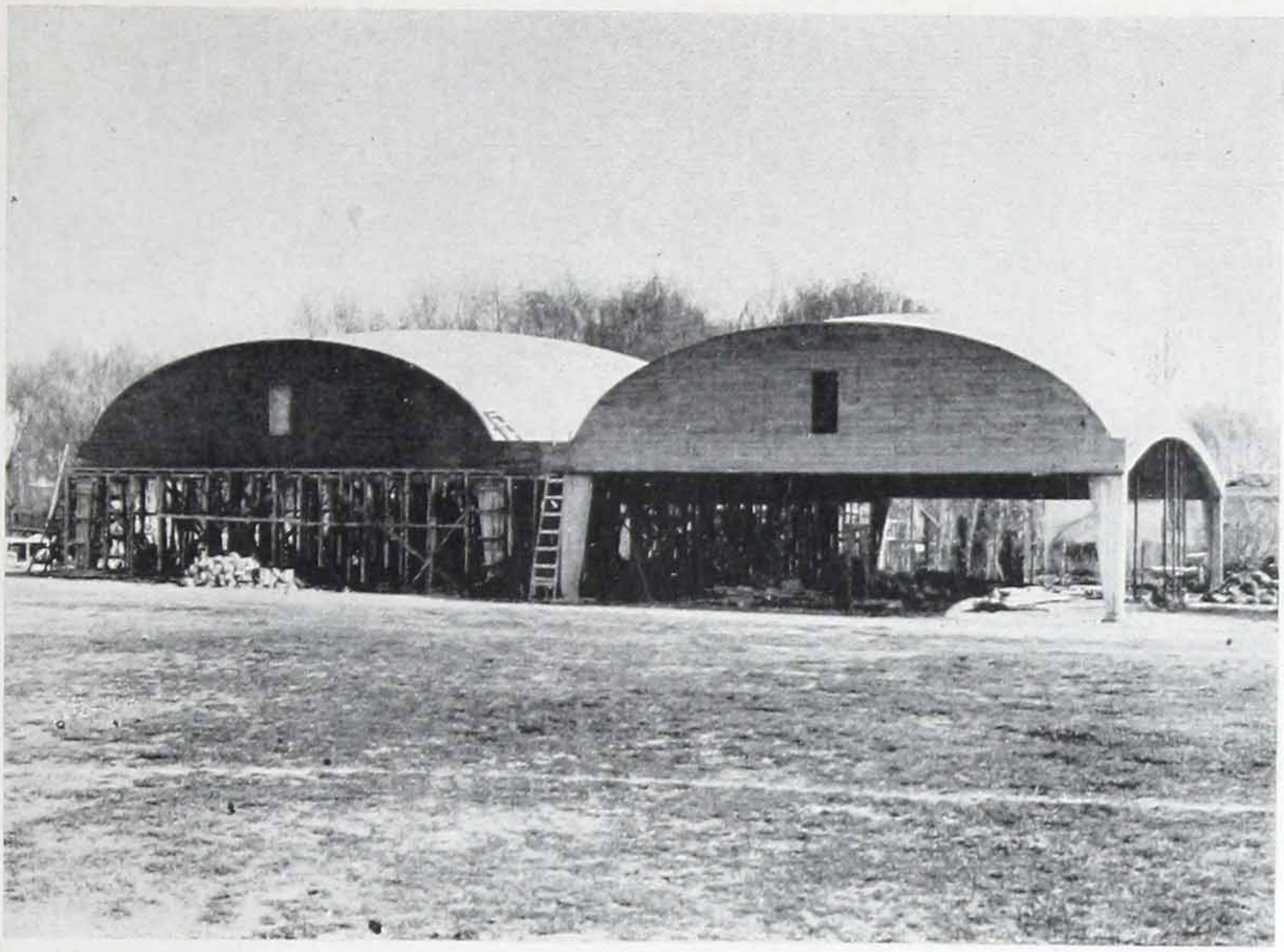
Fábrica "Emeca" en Piedrabuena y Avenida Derqui. C. Federal.

Arquitecto G. A. Yoma. Empresa constructora Mulville y Cía.

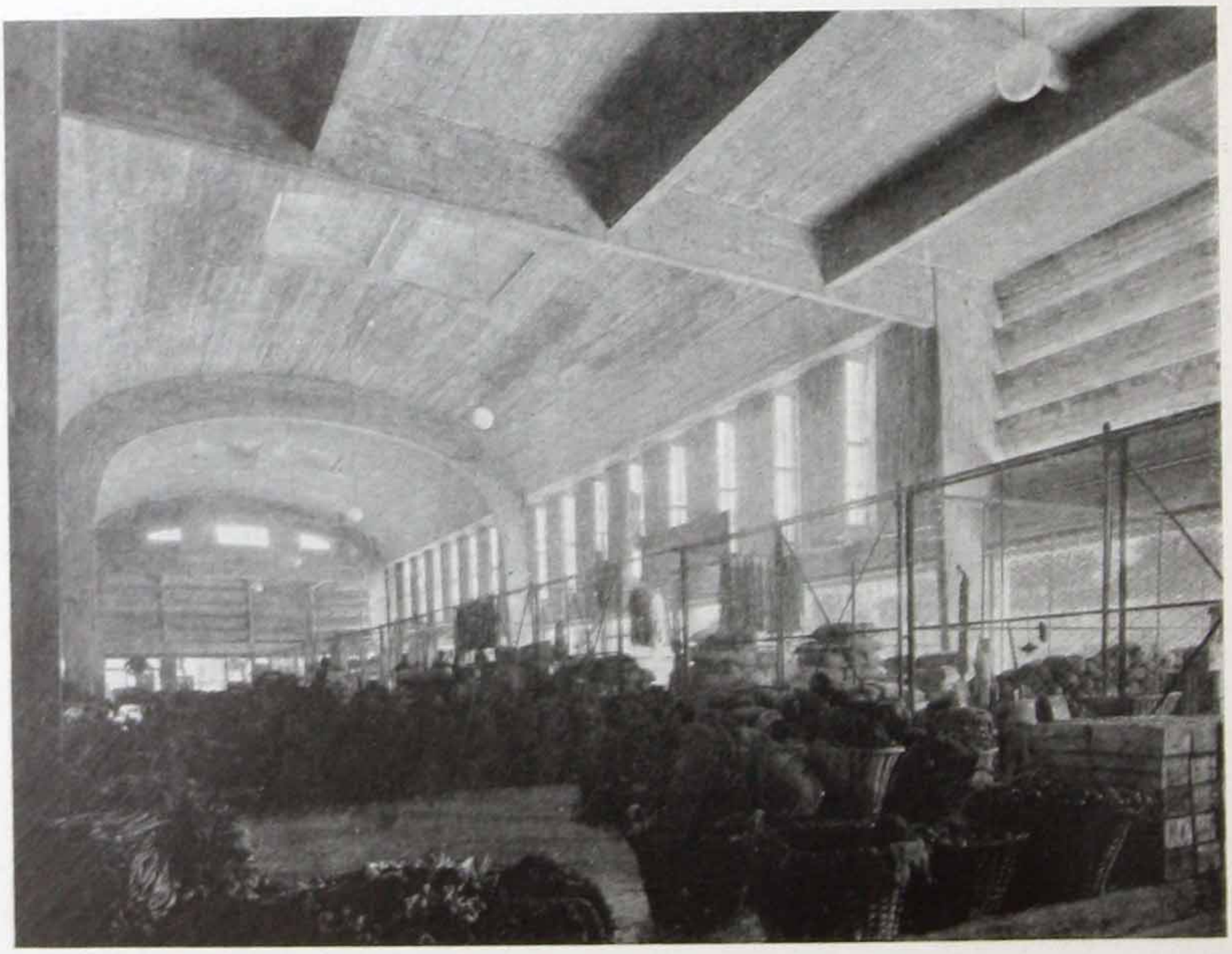




Otros detalles de la fábrica "Emeca".



Club Municipalidad, de Capital Federal. Techos sobre canchas de bochas.
Empresa constructora Gallo, Berg y Cía.



Mercado "Vélez Sarsfield".
Empresa constructora "Geope".

Por consiguiente, la acción del viento no se traducirá en una carga uniformemente repartida, o según leyes más o menos arbitrarias, sino que por el contrario habrá que estudiar el sistema de anclaje y la acción de cargas actuando en sentido contrario al peso propio, al tomar en cuenta dicha acción.

Para casos corrientes, es pues un error el considerar la acción del viento como sobrecarga adicional al peso propio y como generalmente, tratándose de estructura de hormigón, éstas están bien ancladas a las fundaciones y el peso propio es superior a la acción de la depresión, en los casos comunes puede prescindirse de la acción del viento en el cálculo, ya que no solamente no produce un aumento en la fatiga del material, sino una disminución.

En las regiones donde nieva es necesario, sin embargo, considerar una sobrecarga debida a la nieve, que puede superponerse actuando como carga uniformemente repartida.

La carga vertical que debe soportar estará dada por $p = p_o \cos^2 \alpha$ y las componentes según los ejes X, Y, Z tendrán los siguientes valores:

$$p_z = p_o \cos^2 \alpha \quad p_y = p_o \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \quad p_x = 0$$

Los valores de las tensiones en cada punto, para las bóvedas de sección elíptica, estarán dadas por las siguientes expresiones:

$$N_\alpha = - p_o \cos^2 \alpha \frac{q^3}{ab}$$

$$N_{\alpha x} = - 1.5 p_o \operatorname{sen} 2\alpha \left[1 + \frac{e^2 q^2}{a^2 b^2} \cos^2 x \right] x. \qquad [12]$$

$$N_x = - \frac{l^2 - x^2}{2} 3 p_o \left[\left(\frac{ab}{q^3} + \frac{l^2 \cos^2 x}{abq} \right) \cos^2 \alpha + \frac{q l^2}{2ab^3} \operatorname{sen}^2 2\alpha \right]$$

Para el borde libre se tiene, por consiguiente:

$$N_\alpha = 0$$

$$N_{\alpha x} = 0$$

$$N_x = \frac{l^2 - x^2}{2} 3 p_o \frac{a}{b^2}$$

Cálculo de la bóveda

Las fórmulas encontradas permiten determinar, en función de la carga, las tensiones para cada punto de la bóveda.

Conociendo los valores de las tres fuerzas N_x, N_a y N_{xa}, se puede, mediante un cálculo sencillo o aplicando el círculo de Mohr, determinar la dirección e intensidad de las tensiones principales. Pueden trazarse luego, en base a ellas, las trayectorias de las tensiones.

Para dimensionar la bóveda se procederá de la siguiente forma:

Con las máximas fuerzas de compresión se calcula el espesor de la bóveda, no debiendo ser la fatiga admisible del hormigón superior a los 20 kg/cm^2, para evitar que esfuerzos exagerados produzcan efectos de pandeo en la estructura.

Con las fuerzas de tracción se calcularán las secciones de hierro necesario y éste se dispondrá de manera que siga las trayectorias correspondientes, aprovechándose así la sección de hierro al máximo.

Es necesario, por último, calcular los tensores que deben absorber los esfuerzos de corte N_{ax} a lo largo del borde. La tracción total que debe transmitirse a los tímpanos está dada, según se ha visto, por la fórmula [11]

$$S = \int_o^l N_{ax} dx$$

Tratándose de luces grandes la sección de hierro necesaria para absorber esta fuerza es grande y por consiguiente no será posible disponer toda la armadura en el espesor de la bóveda. Para colocarla será necesario aumentar el espesor en esa zona construyendo una viga de borde, que como ya se ha indicado introduce un elemento de perturbación en las tensiones internas.

En las aplicaciones prácticas para el caso de sección elíptica que se está estudiando, la relación entre el radio menor b de la sección transversal y la semilongitud de la luz libre l, conviene mantenerla dentro de los siguientes límites:

$$\frac{2l}{11} \leq b \leq \frac{2l}{8}$$

pues con valores menores se tienen esfuerzos de compresión que exigirían grandes espesores y con alturas mayores se aumenta el desarrollo de la bóveda sin mayor economía, ya que no es aconsejable disminuir el espesor por debajo de los 5 cm.

Para facilitar los cálculos se han construído las tablas de la página siguiente, en las que para una carga unitaria de 0,1 t/m^2 y para las relaciones marcadas, se han calculado para 49 puntos de la cuarta parte de la superficie total, los valores de las constantes por las que hay que multiplicar los números que fijan las relaciones de medidas y cargas de cada caso particular.

Caso práctico

Sea por ejemplo una bóveda con los siguientes datos:

$$a = 5{,}50\,m$$
$$b = 2{,}75\,m \qquad g = 0{,}150\,t/m^2$$
$$l = 11{,}90\,m$$

$$\text{La relación } \lambda = \frac{l}{2a} = \frac{11{,}90}{11} = 1{,}082$$

$$\lambda^2 = 1{,}17$$

Con las tablas puede calcularse para cada punto los valores de las tensiones. Por ejemplo para el punto $n = 3$, $\alpha = 45°$ tendremos:

$$N_\alpha = -\,0{,}071 \times 2{,}75 \times 0{,}150 = -\,0{,}29\ t/m$$

$$N_{\alpha x} = -\,0{,}537 \times 1{,}08 \times 2{,}75 \times 0{,}150 = -\,2{,}38\ t/m$$

$$N_x = +\,0{,}830 \times 1{,}17 \times 2{,}75 \times 0{,}150 = +\,4{,}00\ t/m$$

Los valores de las tensiones principales serán:

$$N_{1\text{-}2} = \frac{N_\alpha + N_x}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(N_\alpha - N_x)^2 + 4N_\alpha x^2}$$

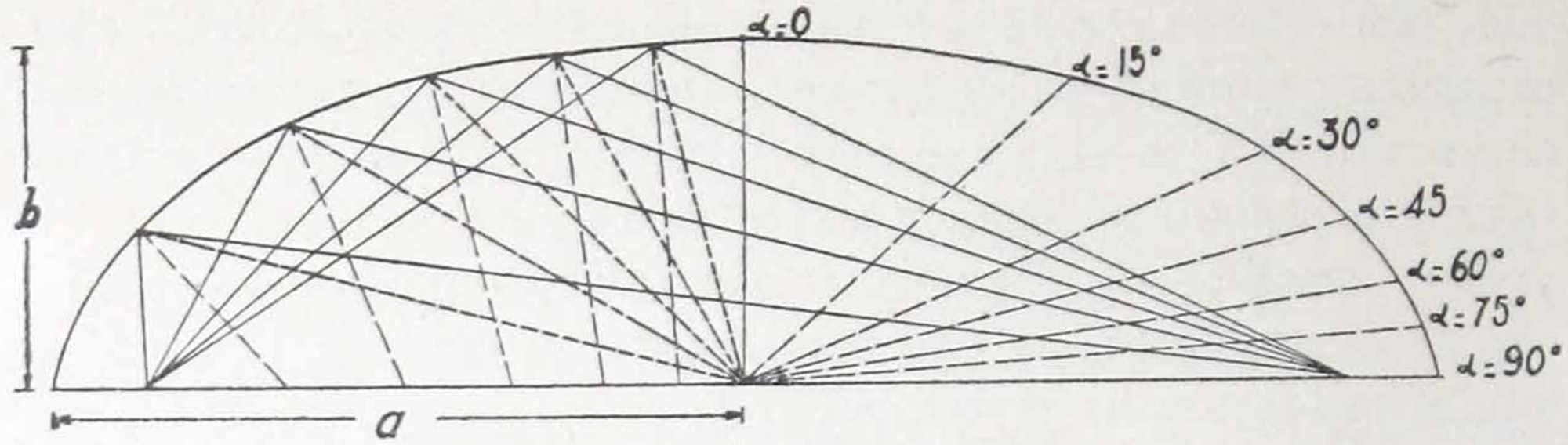


FIG. 8. — Cálculo de los valores de α.

Y la dirección de las tensiones principales estará dada por la relación:

$$tg2\alpha = \frac{2N_{\alpha x}}{N_\alpha - N_x}$$

$$\therefore \alpha = arctg \frac{2N_{\alpha x}}{N_\alpha - N_x}$$

En esta forma se ha calculado el cuadro de valores de la página 32 y se han trazado las líneas isostáticas que pueden verse en la figura correspondiente.

La sección de hormigón se calcula con la fuerza de mayor compresión que se produce en el punto $\alpha = 0 \quad n = 0$

$$N_\alpha = -1{,}65 \ t/m$$

$$N_x = -10{,}60 \ t/m$$

Como para este punto $N_{x\alpha} = 0$, éstas son las tensiones principales, ambas de compresión.

Un cálculo riguroso nos obligaría a trabajar con el estado elástico doble y verificar la sección por medio de la curva intrínseca.

Es, sin embargo, suficiente aproximación —ya que el valor N_α es pequeño con respecto a N_x — considerar un estado elástico simple, sobre todo porque nos colocamos en un caso más favorable al hacer esta simplificación y determinar el espesor del hormigón en función de N_x exclusivamente.

$$e = \frac{10{,}600}{100 \times 20 \ Kg/cm^2} = 5{,}3 \text{ cm.}$$

La sección de hierro se calcula en función de la N_{1-2} de tracción y como se ha dicho se coloca siguiendo las líneas isostáticas.

La sección de hierro suele colocarse en dos capas, una superior y otra inferior, por lo que se emplea hierros de pequeño diáme-

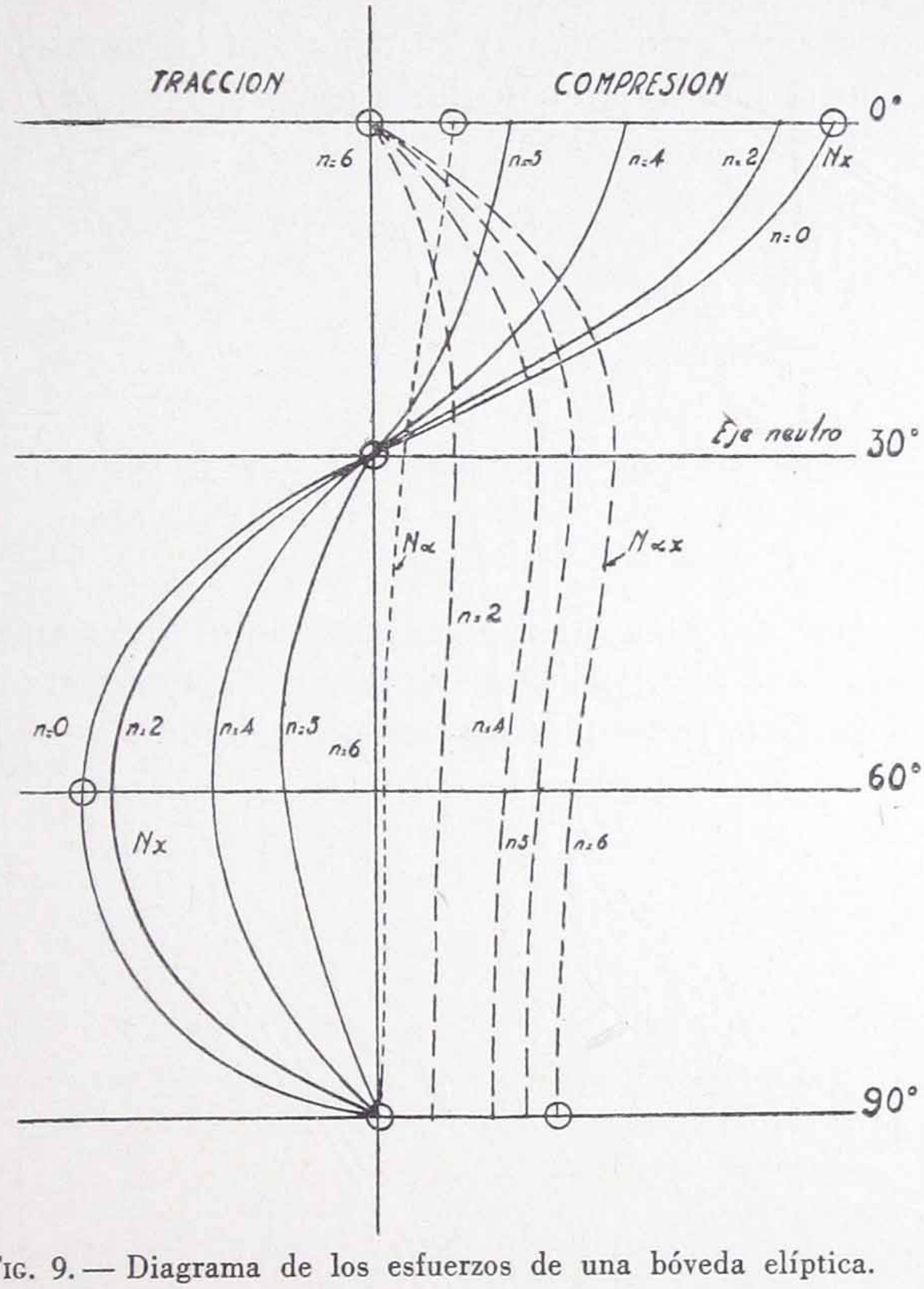


Fig. 9. — Diagrama de los esfuerzos de una bóveda elíptica.

tro, 6 mm ú 8 mm, para asegurar el centrado de las fuerzas en la sección. Además, se colocan, como es común, hierros de repartición adicionales que se continúan en la zona de compresión.

Por último, es necesario calcular la sección de hierro de la viga de borde, que estará dada, como ya se ha visto, por la siguiente fórmula:

$$Fe = \frac{gl^2}{1.000}$$

Los tímpanos pueden hacerse de hormigón macizo con un espesor constructivo que asegure perfectamente la estabilidad de la bóveda.

Si fuese necesario calcular un entramado o un arco atirantado como apoyo, habrá que calcularlo aplicando en cada nudo o en

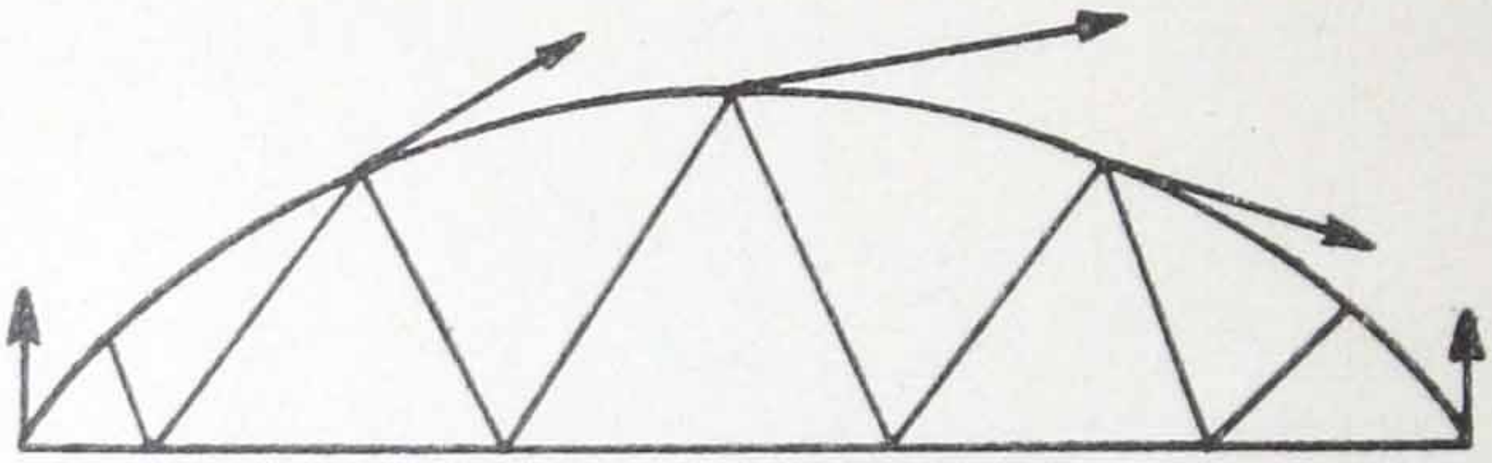


Fig. 10. — Cálculo de un tímpano reticulado.

cada sección del arco las fuerzas resultantes que sobre ese punto transmite la bóveda; dichas fuerzas se considerarán actuando tangencialmente como puede verse en la figura.

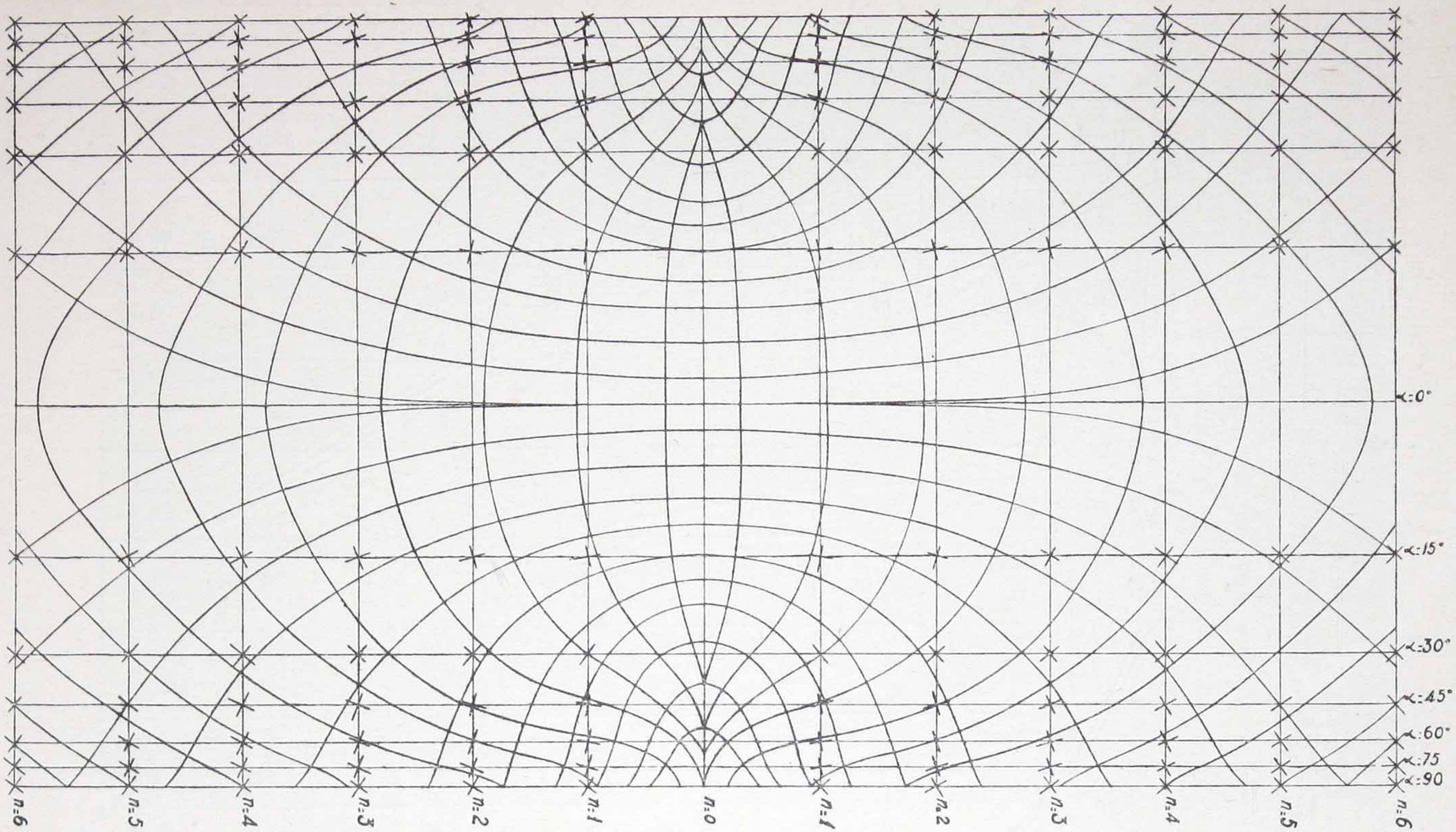


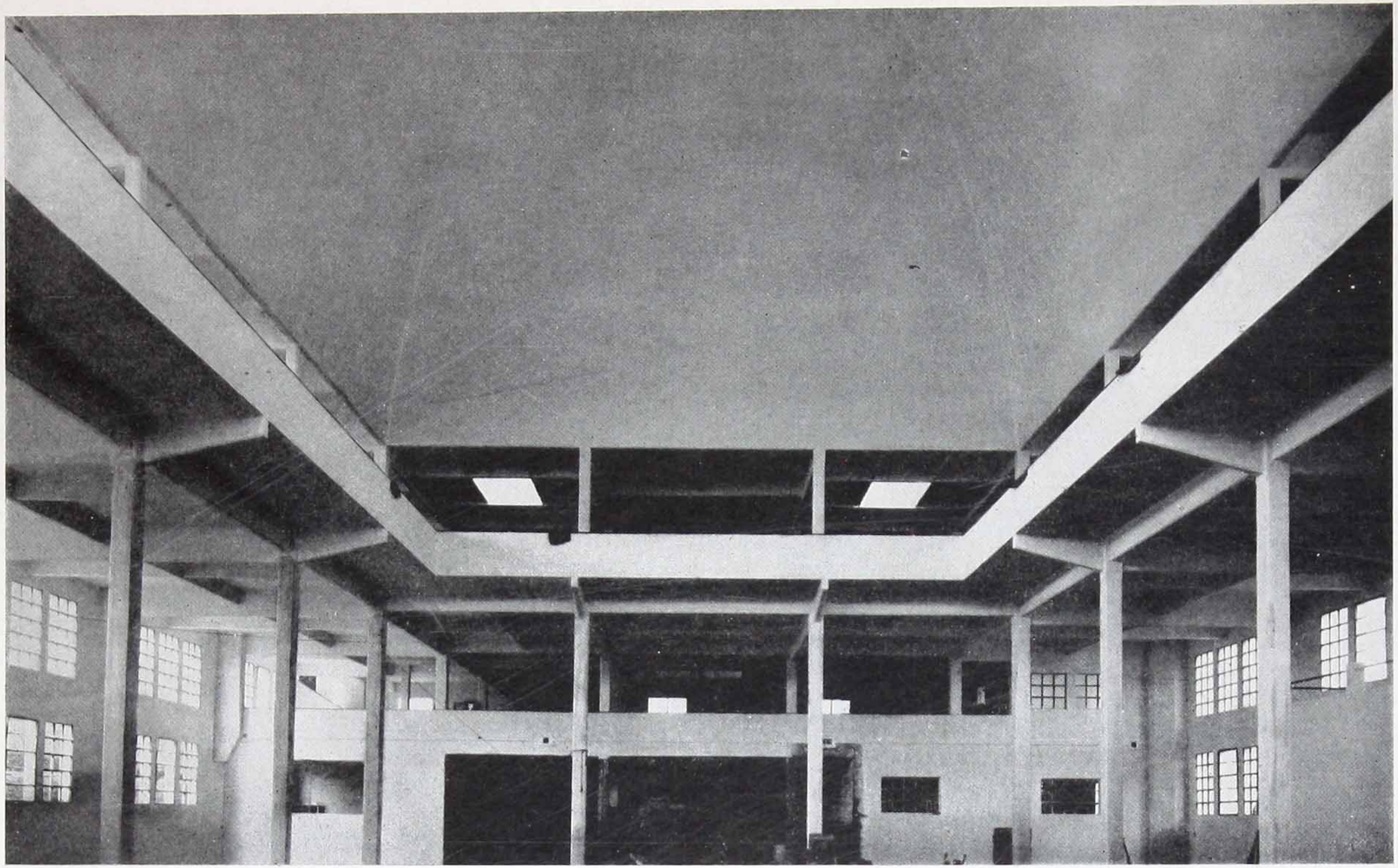
FIG. 11. — Líneas isostáticas.

TABLAS PARA EL CÁLCULO
DE UNA BÓVEDA AUTOPORTANTE DE SECCIÓN ELÍPTICA

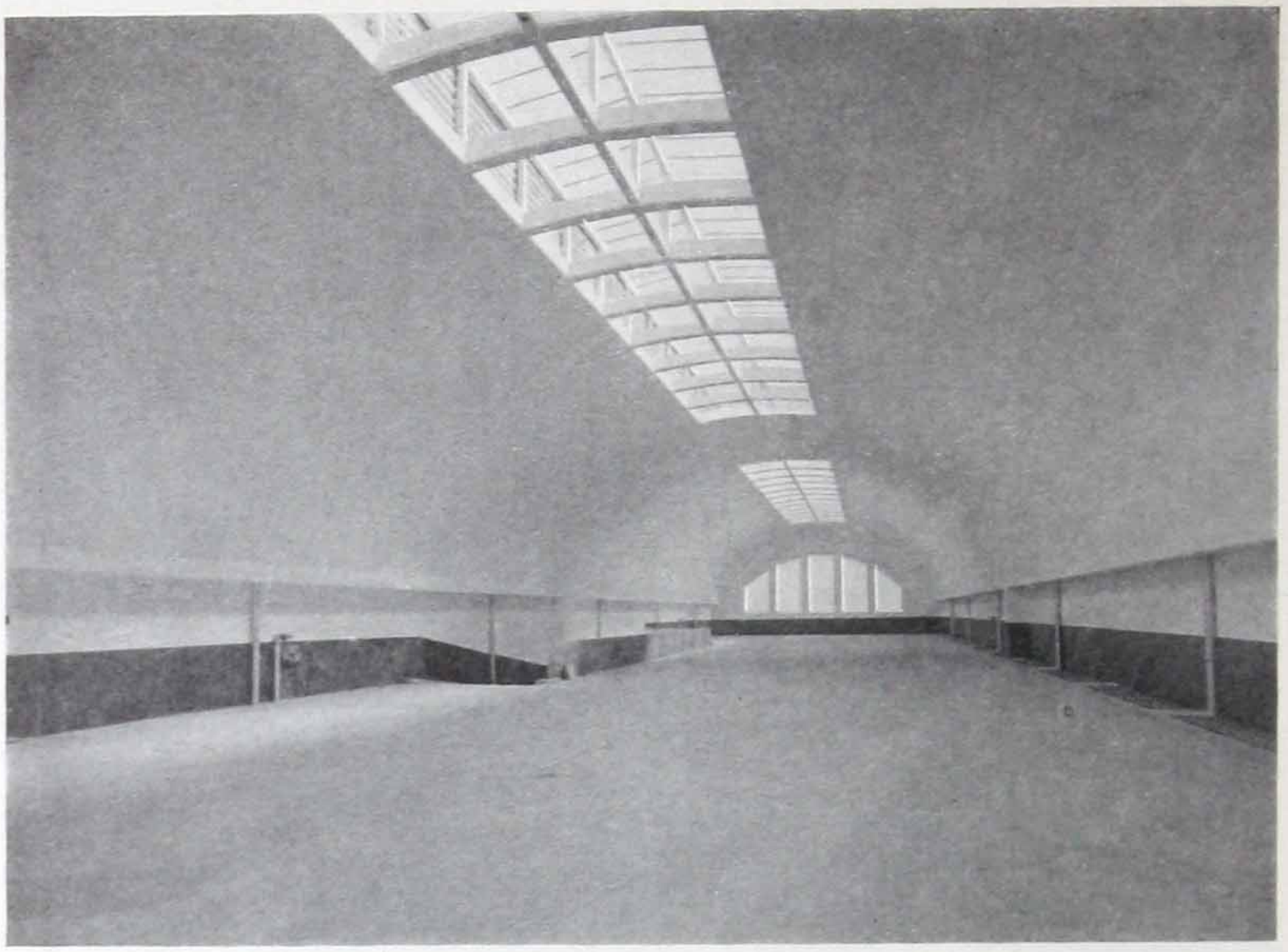
Tabla I

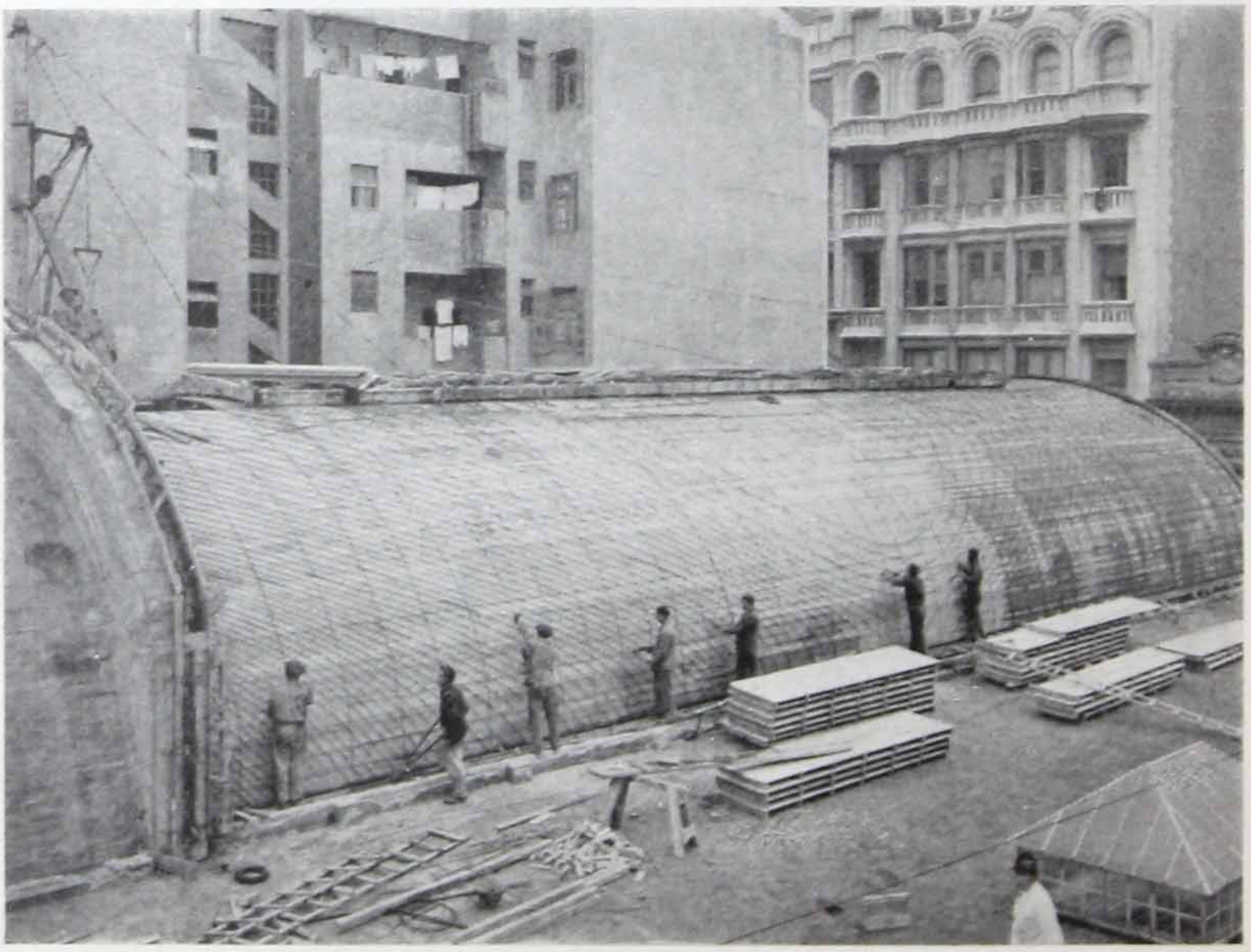
$a = 2b$

$\lambda = \frac{l}{2a}$			$n = \frac{6x}{l}$			$g = 0{,}100\ t/m^2$			
$\alpha =$	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	Factor	Unidad
R =	4,000	3,050	1,740	1,015	0,685	0,540	0,500	b	Abs.
Arco =	0,000						1,211	a	Abs.
Nα =	–0,400	–0,294	–0,150	–0,071	–0,034	–0,014	–0,000	b	t/m^2
Nαx =								λb	t/m^2
n = 0	0	0	0	0	0	0	0		
n = 1	0	–0,155	–0,194	–0,179	–0,154	–0,139	–0,133		
n = 2	0	–0,310	–0,388	–0,358	–0,308	–0,278	–0,266		
n = 3	0	–0,466	–0,585	–0,537	–0,464	–0,416	–0,400		
n = 4	0	–0,620	–0,796	–0,716	–0,616	–0,556	–0,532		
n = 5	0	–0,776	–0,973	–0,895	–0,772	–0,694	–0,666		
n = 6	0	–0,932	–1,170	–1,074	–0,928	–0,832	–0,800		
Nx =								λ^2b	t/m^3
n = 0	–2,200	–1,550	+0,010	+1,100	+1,420	+1,200	0		
n = 1	–2,140	–1,510	+0,010	+1,070	+1,382	+0,895	0		
n = 2	–1,960	–1,380	+0,009	+0,980	+1,270	+0,820	0		
n = 3	–1,650	–1,160	+0,008	+0,830	+1,070	+0,690	0		
n = 4	–1,220	–0,860	+0,006	+0,615	+0,790	+0,510	0		
n = 5	–0,675	–0,475	+0,003	+0,338	+0,436	+0,282	0		
n = 6	–0	–0	+0	+0	+0	+0	0		

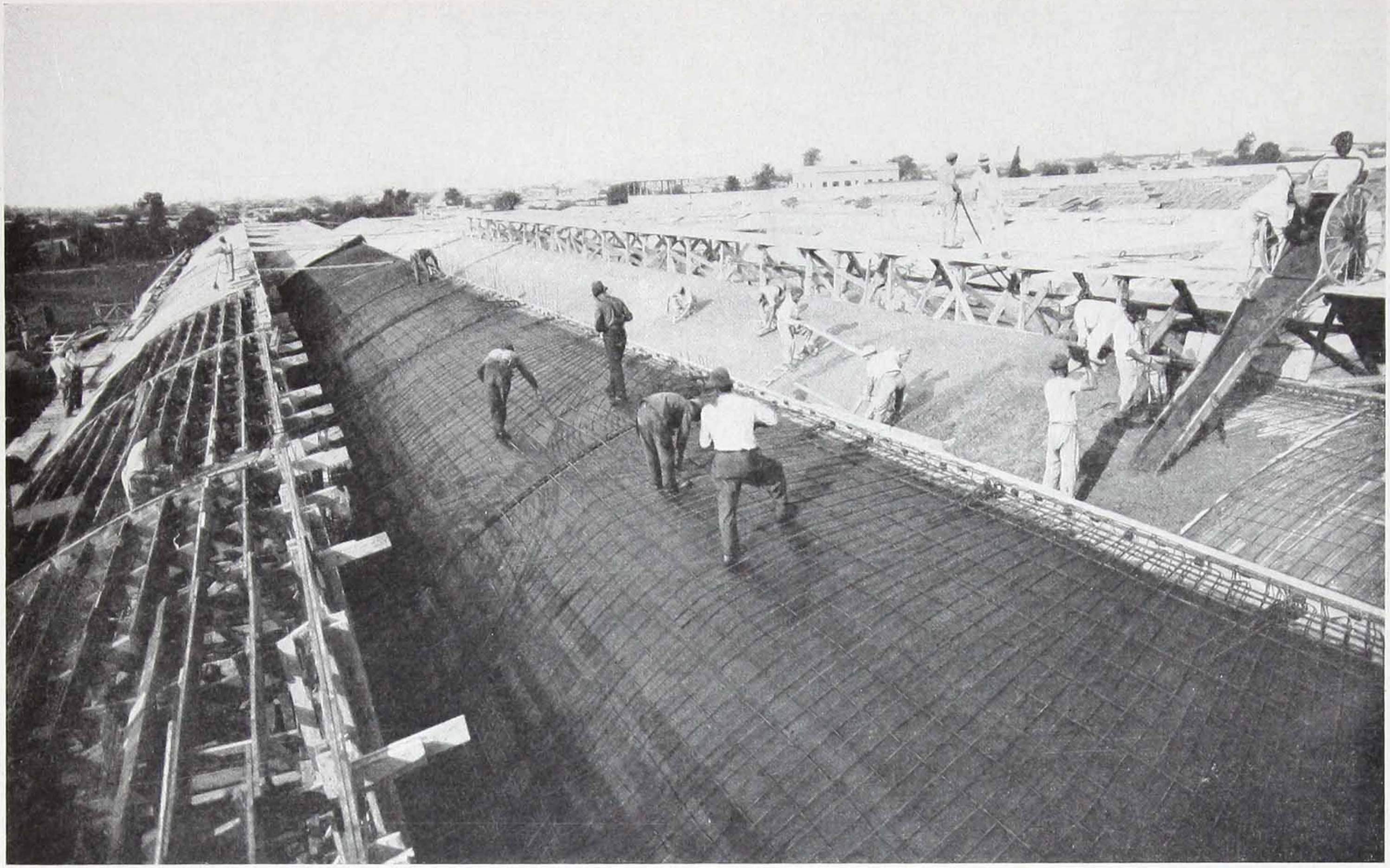


Interior de la fábrica de la calle Avellaneda 1835.

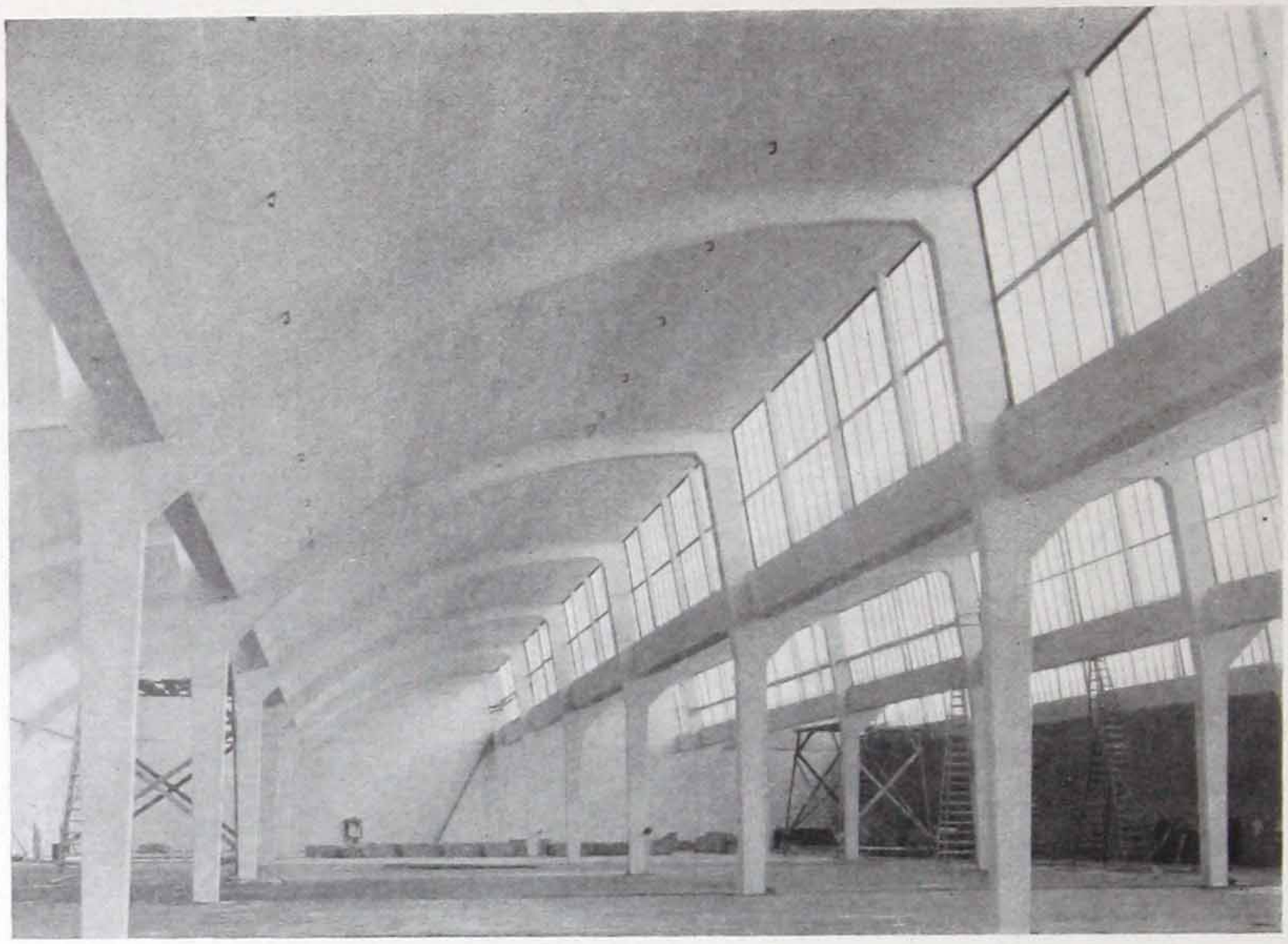




Garage "Vara" en Victoria 1360, Buenos Aires.
Empresa constructora Siemens Bauunion.



Fábrica "Grafa" con bóvedas sistema "Zeiss-Dywidag", en Albarellos 2565.



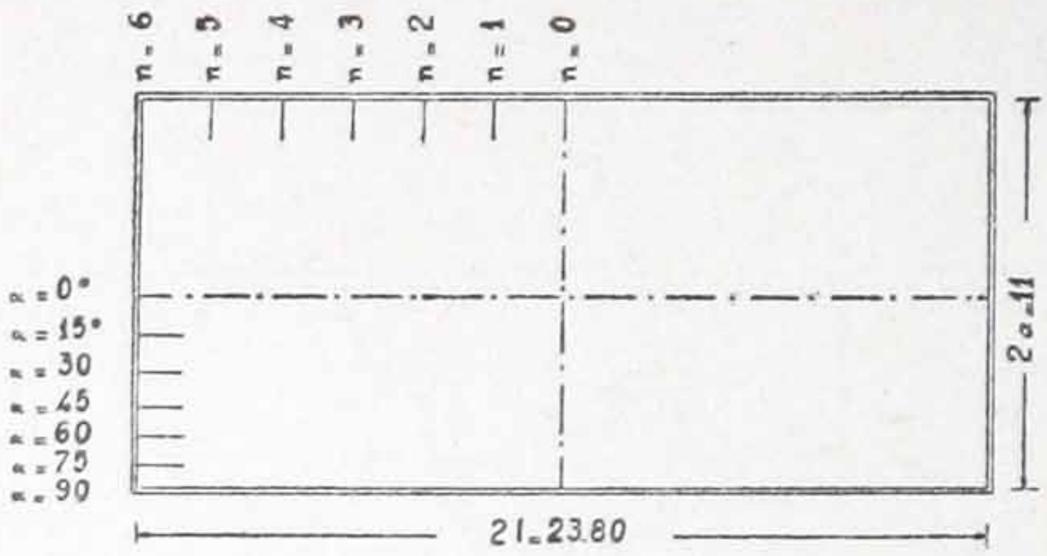
Vistas interiores de la fábrica "Grafa".

Tabla II

$a = 2{,}5b$

$\lambda = \frac{l}{2a}$			$n = \frac{6x}{l}$		$g = 0{,}100\ t/m^2$				
$\alpha =$	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	Factor	Unidad
R =	6,25	4,00	1,77	0,91	0,57	0,44	0,40	b	Abs.
Arco =	0,000						1,135	a	Abs.
Nα =	—0,625	—0,388	—0,152	—0,064	—0,028	—0,011	—0,00	b	$^t/_{m^2}$
Nαx =								λb	$^t/_{m^2}$
n = 0	0	0	0	0	0	0	0		
n = 1	0	—0,275	—0,298	—0,246	—0,202	—0,175	—0,166		
n = 2	0	—0,550	—0,596	—0,492	—0,404	—0,350	—0,332		
n = 3	0	—0,825	—0,894	—0,738	—0,606	—0,525	—0,498		
n = 4	0	—1,100	—1,192	—0,984	—0,808	—0,700	—0,664		
n = 5	0	—1,375	—1,490	—1,230	—1,010	—0,875	—0,830		
n = 6	0	—1,650	—1,788	—1,476	—1,212	—1,050	—0,996		
Nx =								λ^2b	$^t/_{m^2}$
n = 0	—3,550	—1,690	+1,165	+3,220	+3,570	+2,220	0		
n = 1	—3,450	—1,650	+1,130	+3,120	+3,450	+2,160	0		
n = 2	—3,170	—1,500	+1,030	+2,860	+3,170	+1,970	0		
n = 3	—2,660	—1,265	+0,875	+2,410	+2,660	+1,670	0		
n = 4	—1,970	—0,940	+0,650	+1,790	+1,970	+1,230	0		
n = 5	—1,080	—0,515	+0,352	+0,985	+1,080	+0,680	0		
n = 6	—0	—0	+0	+0	+0	+0	0		

CÁLCULO DE UNA BÓVEDA AUTOPORTANTE DE SECCIÓN ELÍPTICA



DATOS
$$\begin{cases} g = 0{,}150\ t/m^2 \\ a = 5{,}50\ m \\ b = 2{,}75\ m \\ l = 11{,}90\ m \\ \lambda = \dfrac{11{,}90}{11} = 1{,}082 \\ \lambda^2 = 1{,}17 \end{cases}$$

$\alpha =$	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$N\alpha =$	—1,65	—1,21	—0,62	—0,29	—0,14	—0,06	—0,00
$Nx\alpha =$							
n=0	0	0	0	0	0	0	0
n=1	0	—0,69	—0,86	—0,79	—0,68	—0,62	—0,59
n=2	0	—1,38	—1,73	—1,59	—1,37	—1,28	—1,18
n=3	0	—2,08	—2,60	—2,38	—2,06	—1,85	—1,78
n=4	0	—2,76	—3,54	—3,18	—2,74	—2,47	—2,36
n=5	0	—3,45	—4,33	—3,98	—3,43	—3,09	—2,96
n=6	0	—4,15	—5,20	—4,76	—4,13	—3,70	—3,56
$Nx =$							
n=0	—10,60	—7,45	+0,05	+5,30	+6,83	+5,77	0
n=1	—10,30	—7,26	+0,05	+5,15	+6,70	+4,32	0
n=2	— 9,42	—6,64	+0,04	+4,72	+6,12	+3,94	0
n=3	— 7,94	—5,58	+0,04	+4,00	+5,15	+3,32	0
n=4	— 5,86	—4,14	+0,03	+2,96	+3,80	+2,45	0
n=5	— 3,25	—2,29	+0,01	+1,63	+2,10	+1,36	0
n=6	—0	—0	+0	+0	+0	+0	0

Longitud total de la semielipse $11{,}00 \times 1{,}178 = 12{,}95$ m

NOTA. — Los esfuerzos se indican en tonelada por metro lineal.

DIRECCIÓN DE LOS ESFUERZOS PRINCIPALES

$$tg\ 2\alpha = \frac{2N_{x\alpha}}{N_x - N_\alpha}$$

$\alpha =$	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
n = 0	0 0°	0 0°	0 0°	0 0°	0 0°	0 0°	0 0°
n = 1	0 0°	+0,205 +5°50′	−2,58 −34°25′	−0,292 −8°10′	−0,20 −5°40′	−0,28 −8°0′	∞ −45°
n = 2	0 0°	+0,51 +13°30	−5,25 −39°50′	−0,63 −16°5′	−0,44 −11°55′	−0,64 −16°20′	∞ −45°
n = 3	0 0°	+0,96 +21°55′	−7,89 −41°25′	−1,10 −23°55′	−0,78 −19°0′	−1,10 −23°55′	∞ −45°
n = 4	0 0°	+1,90 +31°10′	−10,80 −42°20′	−1,95 −31°25′	−1,40 −27°15′	−1,96 −31°30′	∞ −45°
n = 5	0 0°	+6,40 +40°35′	−13,70 −42°55′	−4,56 −38°50′	−3,05 −35°55′	−4,44 −38°40′	∞ −45°
n = 6	0° 0	+6,85 +40°50′	−16,80 −43°20′	−32,80 −44°5′	−59.— −44°30′	−123,— −44°50′	∞ −45°

NOTAS. — Las cifras superiores indican tg 2α. Las cifras inferiores indican el ángulo con respecto a la línea que representa el eje longitudinal para $\alpha = 0°$.

LA CONTINUIDAD EN LAS BÓVEDAS AUTOPORTANTES (*)

Establecidas las condiciones de membrana y por consiguiente despreciando los momentos flectores y esfuerzos de corte, puede obtenerse la ecuación diferencial que resuelve el problema de cómo se reparten las tensiones para el caso de una bóveda empotrada en un extremo y libre en el otro.

$$\frac{\delta}{R\delta\alpha}\left(\frac{\delta f\alpha}{R\delta\alpha}\right) - f\alpha\frac{6}{l^2}\frac{D_x}{D_{\alpha x}} = \frac{6}{5l^2}\frac{D_{\alpha x}}{D_x}\left(P_y + \frac{\delta N_\alpha}{R\delta\alpha}\right) \qquad [13]$$

En esta ecuación los valores D_x y $D_{\alpha x}$ son las rigideces de la bóveda en los dos sentidos: $D = \frac{Eh}{1-\gamma^2}$ y R el radio de curvatura.

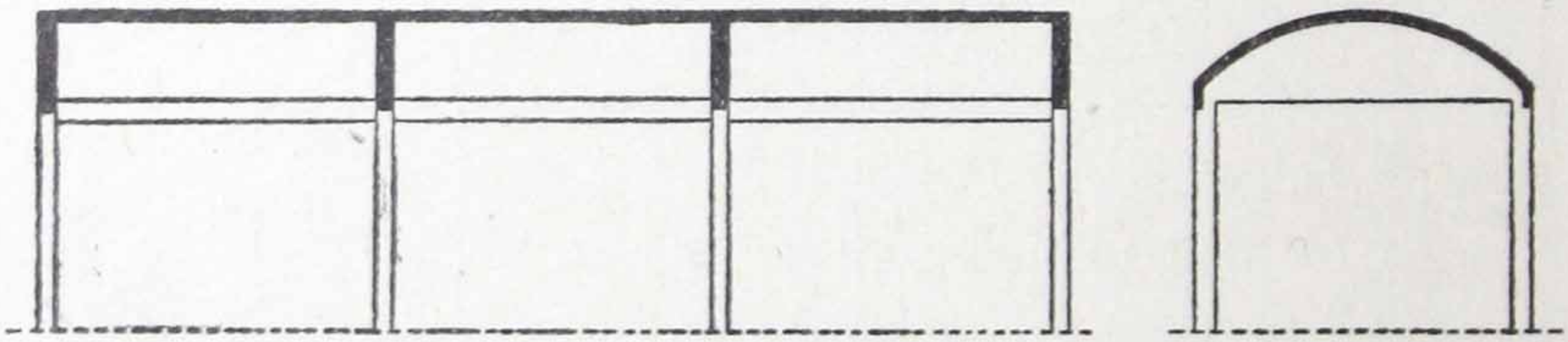


FIG. 12. — Bóvedas continuas.

Esta ecuación ha podido ser integrada únicamente para casos particulares, cuando la sección transversal es un arco de cicloide o un arco de círculo.

(*) La continuidad de las bóvedas autoportantes ha sido estudiada por el doctor F. Dischinger en un interesante trabajo titulado: *La continuidad de los tubos rígidos y de los techos Zeiss-Dywidag*, presentado al Congreso de Zurich de 1936 y publicado por la Asociación Internacional de Puentes y Estructuras en el volumen IV de sus memorias, 1936.

Para el caso de la cicloide se obtiene para las fuerzas de corte $N_{\alpha x}$ la siguiente expresión:

$$N_{\alpha x} = \left(P_y + \frac{\delta N_\alpha}{R \delta \alpha} \right) \left(\frac{l}{2} - x \right) \qquad [14]$$

que establece, como puede verse, la "sorprendente conclusión" de que una bóveda empotrada en un extremo y apoyada libremente en el otro, cuya sección transversal es una cicloide, trabaja como si estuviese simplemente apoyada.

En efecto, $N_{\alpha x}$ para la mitad de la luz $x = l/2$ es nulo y como la ecuación ha sido planteada para el caso límite de empotramiento perfecto en un extremo y libre en el otro, no es posible sacar otra conclusión.

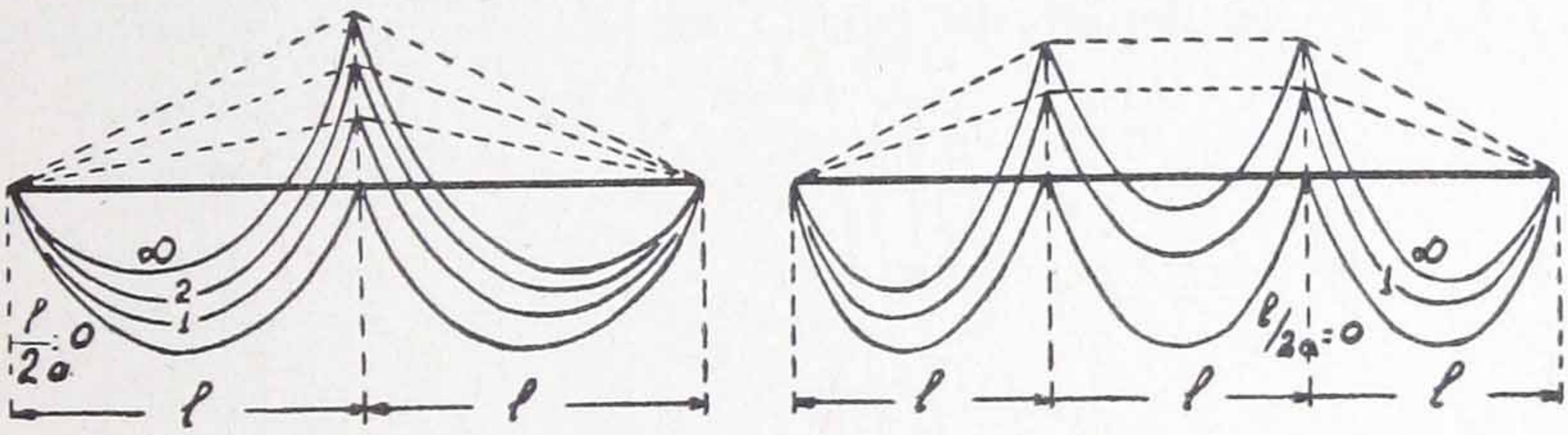


FIG. 13. — Continuidad de las bóvedas cilíndricas.

Para las bóvedas cilíndricas la condición resultante al integrar la ecuación [13] para el esfuerzo cortante $N_{\alpha x} = 0$ es la siguiente:

$$x_o = \frac{24a^2 + 5l^2}{6a^2 + l^2} \times \frac{1}{8}$$

siendo l la luz libre y a el radio de la sección transversal.

Esta ecuación nos establece la siguiente condición:

para

$$l \gg a \qquad x_o \longrightarrow \frac{5}{8} l$$

$$l \ll a \qquad x_o \longrightarrow \frac{1}{2}$$

es decir, para bóvedas cuya luz sea menor que el ancho, el empotramiento tiende a desaparecer y la bóveda a trabajar como si fuese simplemente apoyada; para luces mayores que el ancho la bóveda tiende a trabajar como si fuese una viga rectangular.

Para el caso de una bóveda de sección circular y de dos o tres tramos, por medio de la ecuación de los tres momentos han sido planteados los valores de la figura para diversas relaciones de $\frac{l}{a2}$.

De todo lo dicho se deduce que para bóvedas de luces pequeñas con respecto al ancho, puede despreciarse completamente la continuidad, ya que entonces las bóvedas trabajan como simplemente apoyadas.

Los cálculos laboriosos que exige la determinación de la continuidad y la poca influencia que ésta parece tener para las bóvedas de longitud corriente, hacen poco interesante a nuestro juicio el considerar este aspecto en las bóvedas autoportantes.

CÚPULAS

Para la determinación de las tensiones en una cúpula de hormigón, puede emplearse la teoría de las membranas.

Las cúpulas suelen ser del tipo cerrado o abierto, limitadas como puede verse en la figura por uno o dos cortes transversales determinados por los ángulos α_1 y α_2.

Cúpulas esféricas

Si las cúpulas son esféricas los dos radios de curvatura R_α y R_β son iguales y las ecuaciones generales pueden escribirse, siendo $R_\alpha = R_\beta = a$ y $r_a = a \, sen \, \alpha$.

$$\frac{\delta N_\beta}{\delta \beta} + N_{\alpha\beta} \, cos \, \alpha + \frac{\delta}{\delta \alpha} \left(N_{\alpha\beta} \, sen \, \alpha \right) + p_x a \, sen \, \alpha = 0$$

$$\frac{\delta}{\delta \alpha} \left(N_\alpha \, sen \, \alpha \right) - N_\beta \, cos \, \alpha + \frac{\delta N_{\alpha\beta}}{\delta \beta} + p_y a \, sen \, \alpha = 0 \qquad [15]$$

$$N_\alpha + N_\beta + a p_z = 0$$

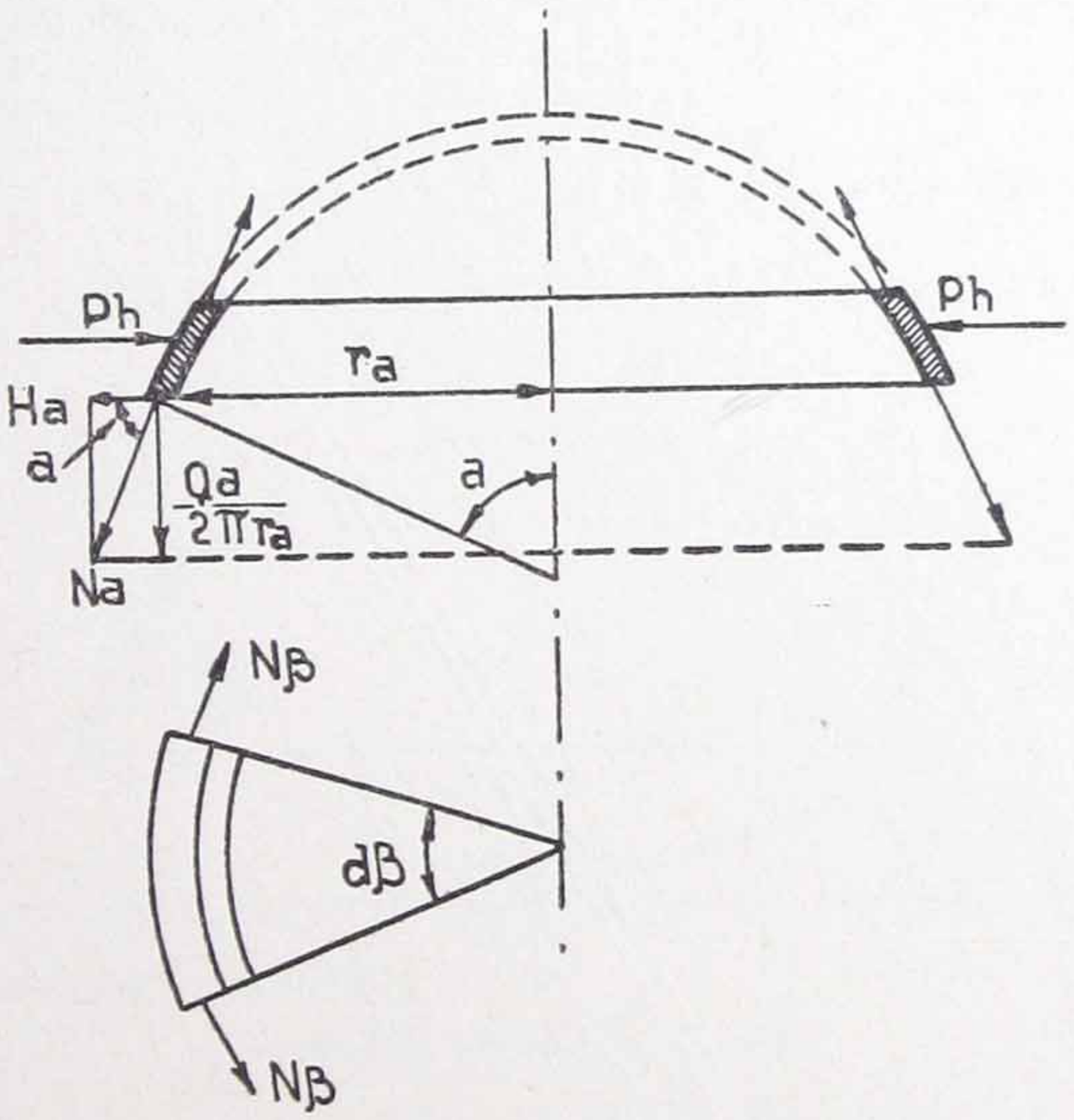


FIG. 14. — Cúpula esférica.

Estas fórmulas pueden simplificarse en la siguiente forma:

$$\frac{1}{sen\alpha}\frac{\delta N_\beta}{\delta\beta} + 2N_{\alpha\beta}\cos\alpha + \frac{\delta N_{\alpha\beta}}{\delta\beta} + ap_x = 0$$

$$\frac{\delta N_\alpha}{\delta\alpha} + (N \ - N_\beta)\,cotg\,\alpha + \frac{1}{sen\alpha}\frac{\delta N_{\alpha\beta}}{\delta\beta} + ap_y = 0 \qquad [16]$$

$$N_\alpha + N_\beta + ap_z = 0$$

Para cargas uniformemente repartidas en toda la superficie, las derivadas con respecto a β son nulas y las ecuaciones diferenciales pueden escribirse como sigue:

$$N_{\alpha\beta} = -\frac{a}{sen\alpha}\int p_x\, sen^2\,\alpha d\alpha + C_1$$

$$N_\beta = -N_\alpha - p_z a \qquad [17]$$

$$N_\alpha = -\frac{a}{sen^2\alpha}\int (p_y + p_z\, cotg\,\alpha)\, sen^2\alpha d\alpha + C_2$$

Las constantes de integración podrán determinarse en la siguiente forma:

Caso de cúpula abierta: $\alpha = \alpha_1 \quad N_\alpha = 0$

Caso de cúpula cerrada: $\alpha = 0 \quad N_\alpha = N_\beta$

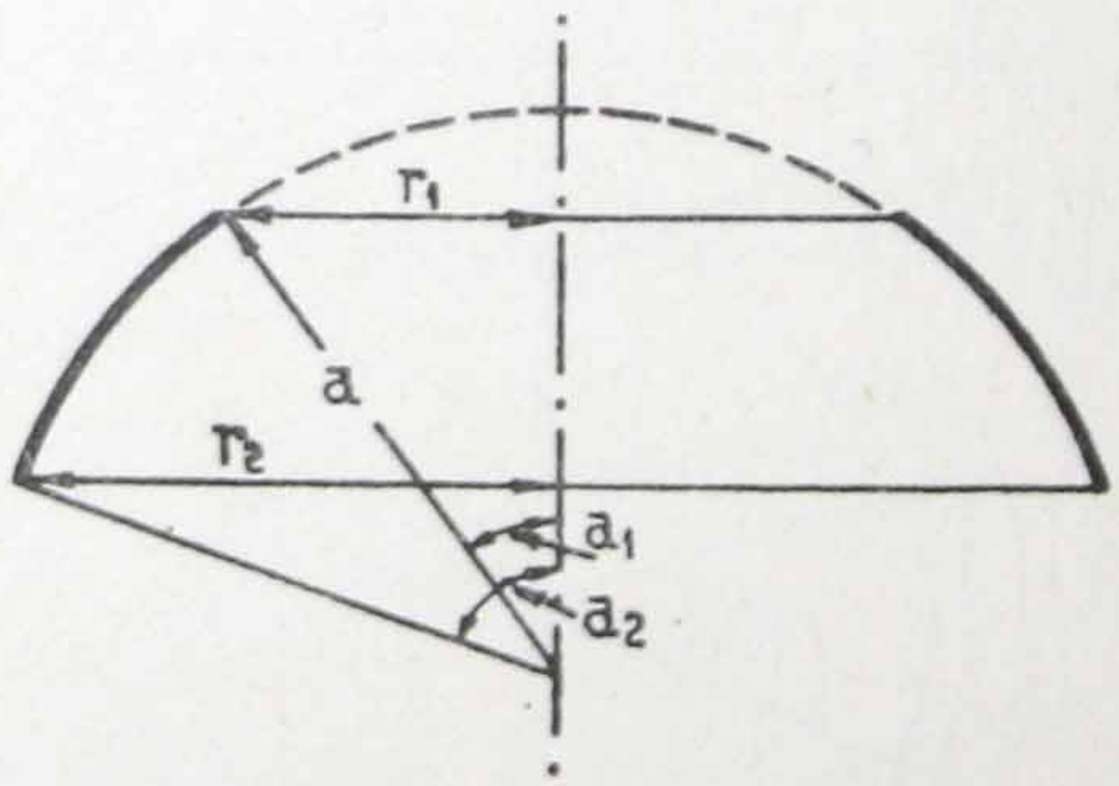


FIG. 15. — Cúpula abierta.

Además, para el caso de carga $p_x = 0 \quad N_{\alpha\beta} = 0.$

Las fórmulas que resuelven los diversos casos serán las siguientes:

Cúpula abierta — peso propio

$$N_\alpha = -\,ag\,\frac{\cos\alpha_1 - \cos\alpha}{sen^2\alpha} \qquad N_\beta = ag\left(\frac{\cos\alpha_1 - \cos\alpha}{sen^2\alpha} - \cos\alpha\right) \quad [18]$$

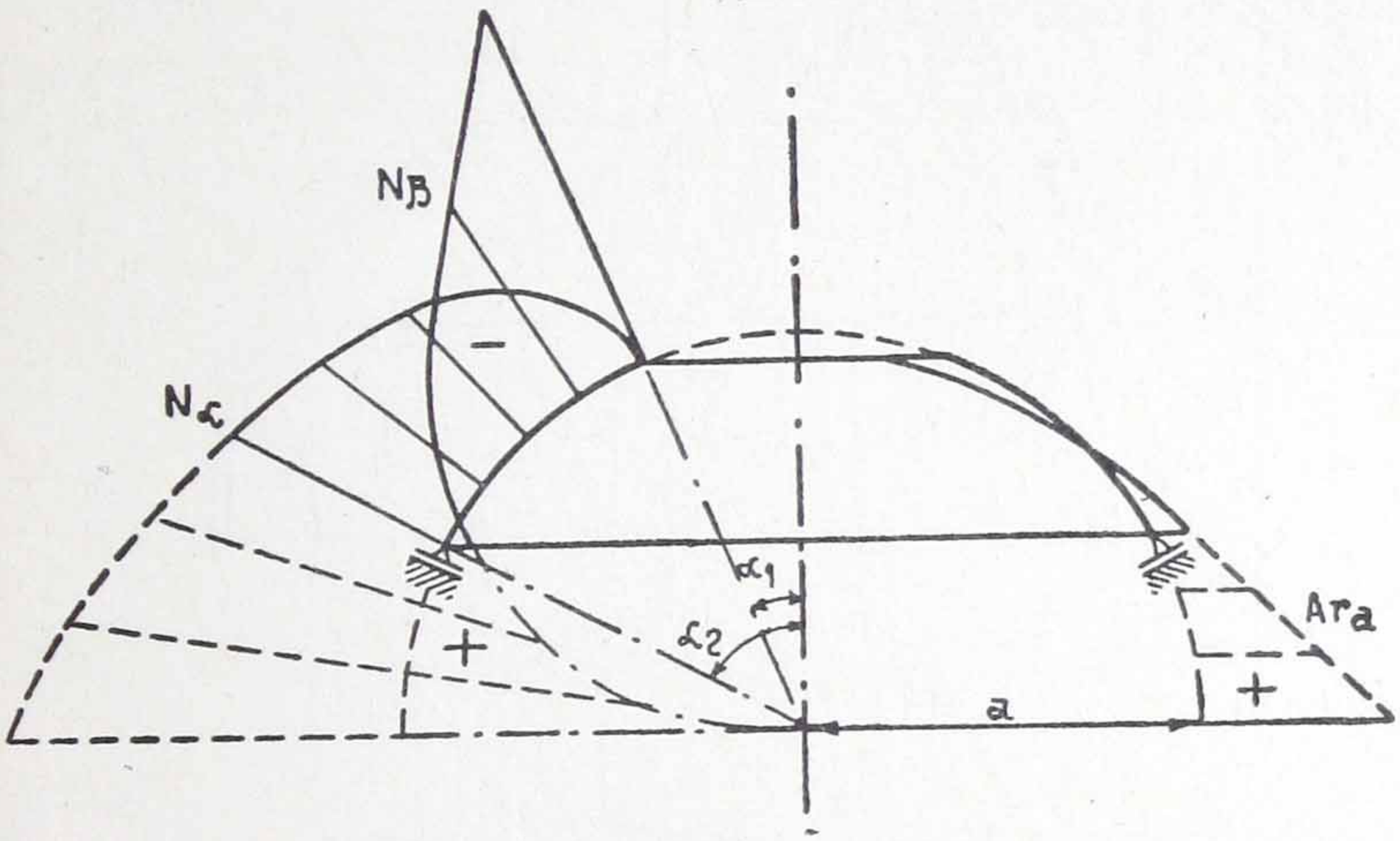


FIG. 16. — Cúpula abierta. Peso propio.

Cúpula abierta — carga de nieve

$$N_\alpha = -\,\frac{ap_s}{2}\left(1 - \frac{sen^2\alpha_1}{sen^2\alpha}\right) \qquad N_\beta = \frac{ap_s}{2}\left(1 - \frac{sen^2\alpha_1}{sen^2\alpha} - 2\cos^2\alpha\right) \quad [19]$$

Cúpula abierta — tensiones producidas por la carga $G = 2\pi aP\,sen\,\alpha_1$ *del peso de una linterna.*

$$N_\alpha = -\,N_\beta = -\,P\,\frac{sen\,\alpha_1}{sen^2\alpha}$$

Cúpula cerrada — peso propio.

$$p_x = 0 \quad p_y = g\,sen\,\alpha \quad p_z = cos\alpha$$

$$N_\alpha = -\frac{ag}{1+cos\,\alpha};\; N_\beta = -\frac{ag}{1+cos\,\alpha}\left(1-cos\,\alpha-cos^2\alpha\right);\; N_{a\beta} = 0 \quad [20]$$

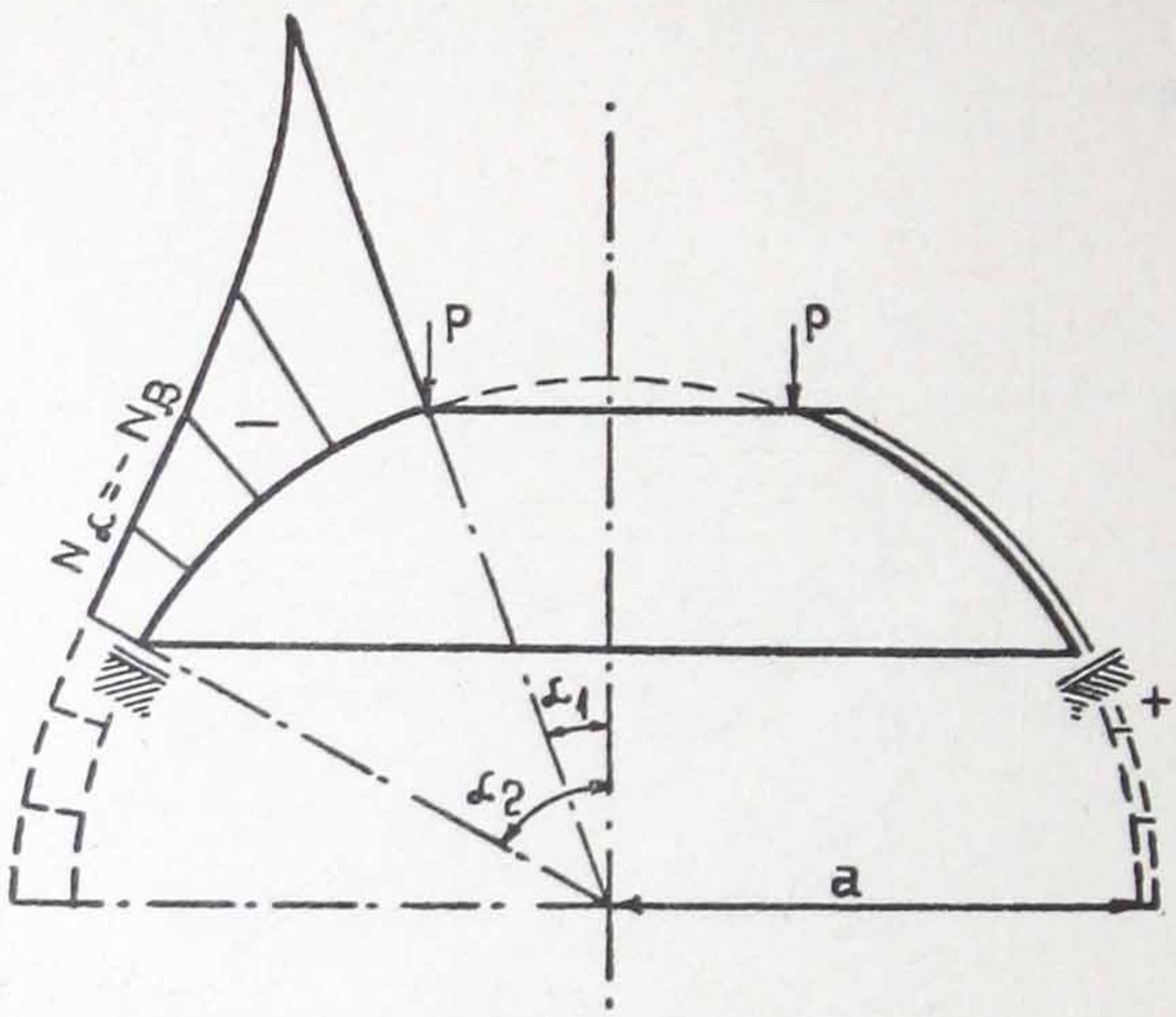


FIG. 17. — Cúpula abierta. Carga de una linterna.

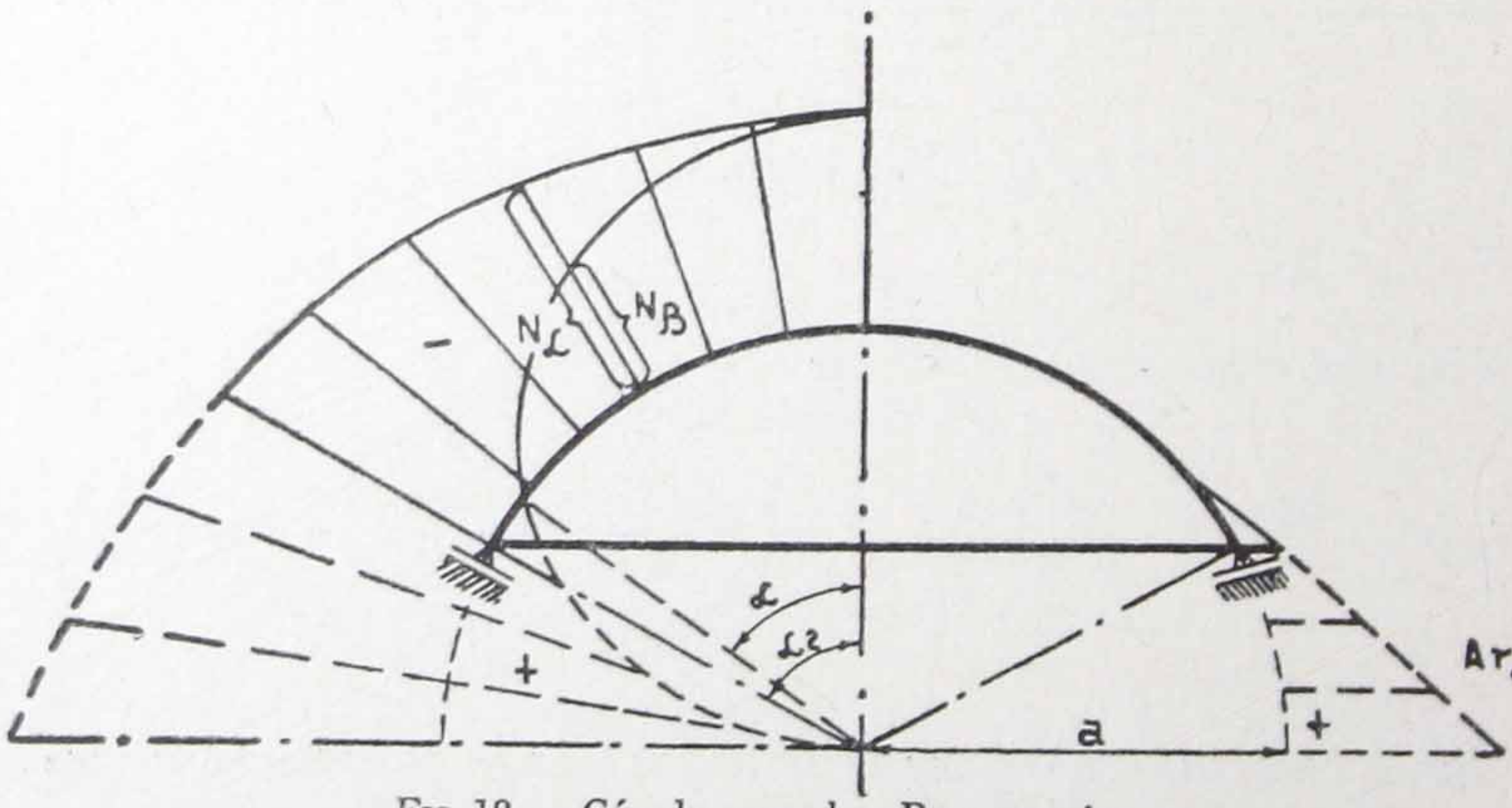


FIG. 18. — Cúpula cerrada. Peso propio.

Como puede verse en los diagramas y fórmulas, la fuerza N_a en la dirección meridiana para cualquier ángulo α comprendido

entre 0 y 90°, produce compresión. Por el contrario, la fuerza N_β cambia de signo al pasar de 0 a 90°. El valor de la fuerza se anula para $\alpha^* = 51° 50'$, valor que se puede calcular fácilmente haciendo en la fórmula [20] $(1 - cos\,\alpha - cos^2\alpha) = 0$

Si la bóveda no tiene tangente vertical es necesario colocar un anillo de tracción para absorber la componente horizontal de la fuerza N_α.

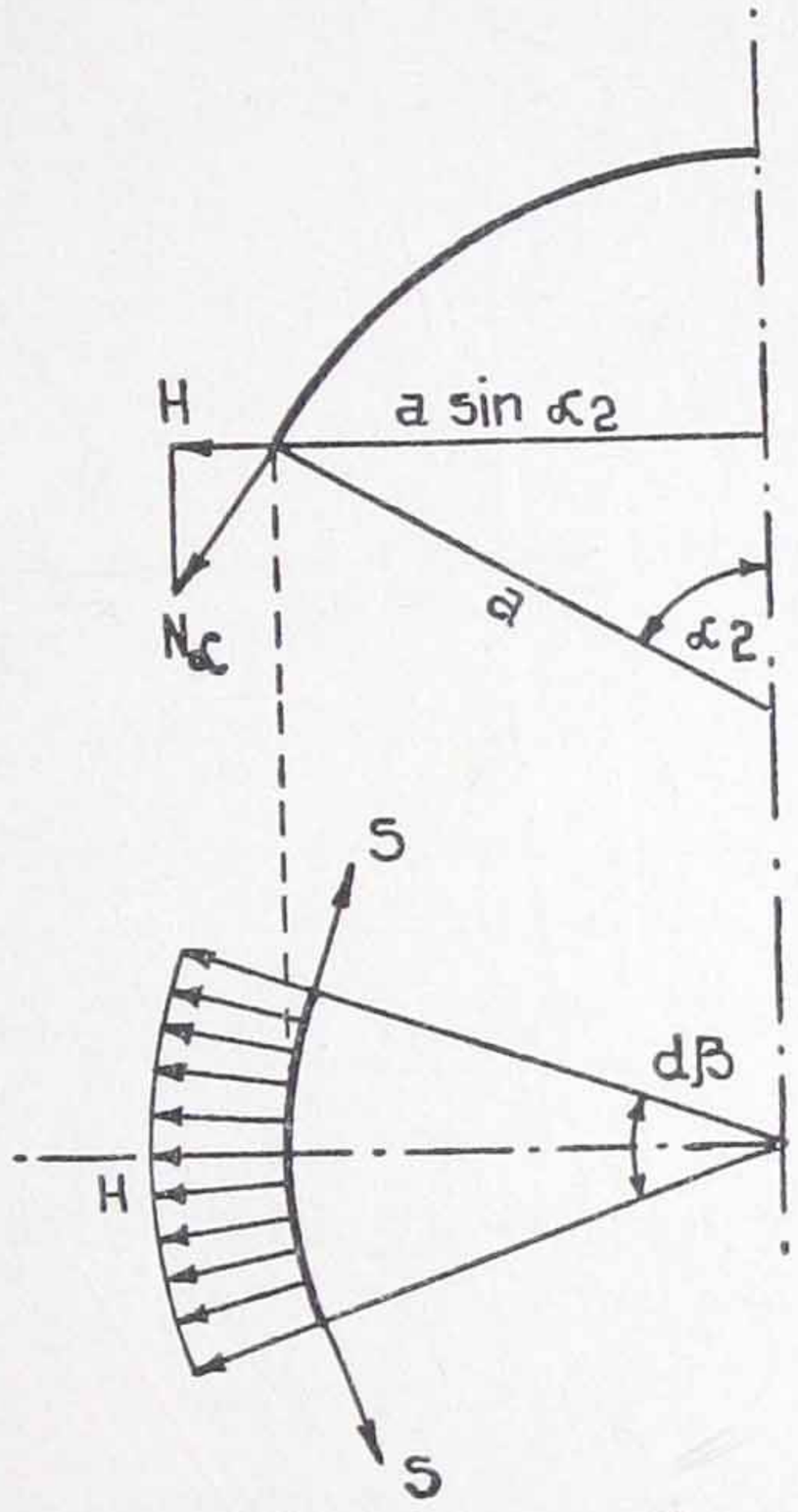


FIG. 19. — Cálculo de un anillo de tracción.

$$H = N_\alpha\, cos\,\alpha$$

La fuerza total que debe soportar el anillo será

$$S = -Ha\, sen\,\alpha_2 \qquad \text{siendo } H = -ag\,\frac{cos\,\alpha_2}{1 + cos\,\alpha_2}$$

$$S = \frac{a^2 g}{2}\,\frac{sen^2\alpha_2}{1 + cos\,\alpha_2}\,. \qquad [21]$$

Cúpulas elípticas

Por medio de integrales elípticas, se han determinado los fórmulas que van a continuación y sobre cuyo desarrollo no entramos en detalles.

Llamando a al eje mayor de la elipse y b al menor, para determinar las juntas de la superficie establezcamos la relación $h = \frac{Y}{b}$ (ver figura).

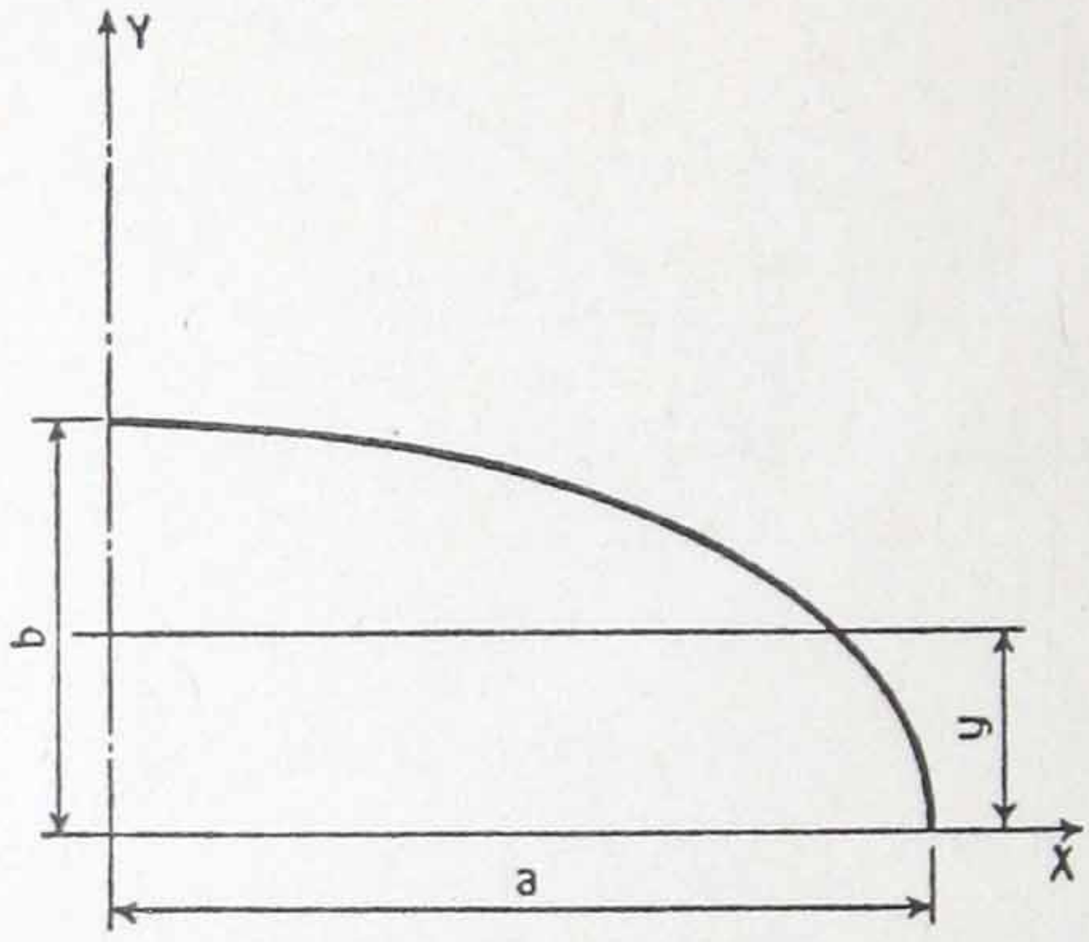


FIG. 20. — Cúpula elíptica.

Llamando g al peso por metro cuadrado de superficie, el peso total G de la cúpula será:

$$G = \alpha 2\pi a^2 C \alpha g$$

En cada punto las tensiones debidas al peso g quedan determinadas por las siguientes expresiones:

$$N_a = \frac{ga^2}{b}\left(h - \frac{C}{(1-h^2)Q}\right) \qquad [22]$$

$$N_x = \frac{ga^2}{b} \times \frac{CQ}{1-g^2}$$

En el eje de rotación, cúspide de la cúpula, se tendrá:

$$N_a = N_x = \frac{ga^2}{2b} \qquad [23]$$

Una carga uniformemente distribuída p producirá las siguientes tensiones:

$$N_x = \frac{pa^2}{2b} Q$$

$$N_\alpha = \frac{pa^2}{2b} + \frac{2h^2 - 1}{Q} \qquad [24]$$

Los valores C y Q tienen las siguientes expresiones:

$$C = \frac{1}{2} + \frac{1 - K^2}{2k} log(1 + k) - \frac{h}{2} \sqrt{1 - k^2 (1 - h^2) -}$$

$$- \frac{1 - k^2}{2k} log \left(hk + \sqrt{1 - k^2 (1 - h^2)} \right)$$

$$Q = \sqrt{1 - k^2 (1 - h^2)}$$

siendo $k^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$

Para poder operar con estos valores con comodidad han sido tabulados en el cuadro de la página siguiente.

TABLA DE COEFICIENTES PARA CÚPULAS ELÍPTICAS

$h = \frac{y}{b}$	*Valores de C*								
	$\frac{b}{a}$								
	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.0	.547	.588	.636	.690	.747	.807	.870	.934	1.000
0.1	.526	.558	.596	.640	.687	.737	.789	.844	.900
0.2	.501	.525	.554	.588	.626	.666	.709	.754	.800
0.3	.469	.486	.508	.534	.563	.594	.627	.663	.700
0.4	.430	.441	.456	.475	.496	.520	.545	.572	.600
0.5	.381	.389	.399	.412	.427	.443	.461	.480	.500
0.6	.323	.328	.335	.343	.352	.362	.374	.387	.400
0.7	.257	.260	.263	.267	.272	.278	.285	.292	.300
0.8	.181	.182	.183	.185	.188	.190	.193	.196	.200
0.9	.095	.095	.096	.096	.097	.098	.098	.099	.100
1.0	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000

Valores de Q									$h = \frac{y}{b}$
$\frac{b}{a}$									
0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	
.200	.300	.400	.500	.600	.700	.800	.900	1.000	0.0
.227	.315	.410	.507	.605	.704	.802	.901	1.000	0.1
.280	.356	.440	.529	.621	.714	.809	.904	1.000	0.2
.356	.415	.485	.563	.646	.732	.820	.909	1.000	0.3
.440	.485	.543	.608	.680	.756	.835	.917	1.000	0.4
.529	.563	.608	.661	.721	.786	.854	.926	1.000	0.5
.621	.646	.680	.721	.768	.821	.877	.937	1.000	0.6
.714	.732	.756	.786	.821	.860	.904	.950	1.000	0.7
.809	.820	.835	.854	.877	.903	.933	.965	1.000	0.8
.904	.910	.917	.926	.937	.950	.965	.982	1.000	0.9
1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.0

BÓVEDAS POR ARISTAS

La teoría de las membranas tiene una aplicación interesante en el cálculo de bóvedas por aristas.

Estas bóvedas tienen un número determinado de lados iguales $2n$ y pueden estar formadas por consiguiente por las intersecciones de n bóvedas. La curvatura de la sección transversal $\frac{1}{R_\beta}$ puede ser variable pero generalmente se adopta una curva definida por una función de 2^o grado, círculo, elipse, etc.

Cada sector de la bóveda está limitado por un borde $\alpha = \alpha_2$ y por dos aristas que forman entre sí un ángulo $2\varphi = \frac{\pi}{n}$. Las condiciones de borde son pues análogas a las de las bóvedas autoportantes estudiadas en el capítulo anterior y puede establecerse el estado de membrana. Por otra parte las fuerzas longitudinales se disponen en forma tal que en la intersección de las bóvedas son nulas en la dirección de la normal y la binormal.

Las $2n$ funciones incógnitas $f(\alpha)$ que representan las constantes de integración pueden resolverse con las $2n$ condiciones de borde a lo largo de las líneas de intersección.

El estado de membrana para este caso estaría representado por las siguientes ecuaciones para el caso de cargas verticales

$$p_x = 0 \qquad p_y = 0 \qquad P_z = p_z(\alpha) \qquad \text{Siendo} \qquad r \equiv R_\beta$$

$$N_\alpha = -p_z R_\beta \quad , \quad N_{\alpha x} = -\left(\frac{\delta N\alpha}{R_\beta \delta\alpha} + p_y\right) x + f_1(\alpha) = -p_y{}^* x + f_1(\alpha)$$

$$N_x = \frac{\delta p_y{}^*}{2R_\beta \delta\alpha} x^2 - \frac{\delta f_1(\alpha)}{R_\beta \delta\alpha} + f_2(\alpha)$$

La discontinuidad en las aristas obliga a plantear las ecuaciones de las tensiones por partes y separadamente.

Por una parte se tiene que la transmisión de las cargas se efectúa a las aristas por el efecto de viga y por otra parte la acción

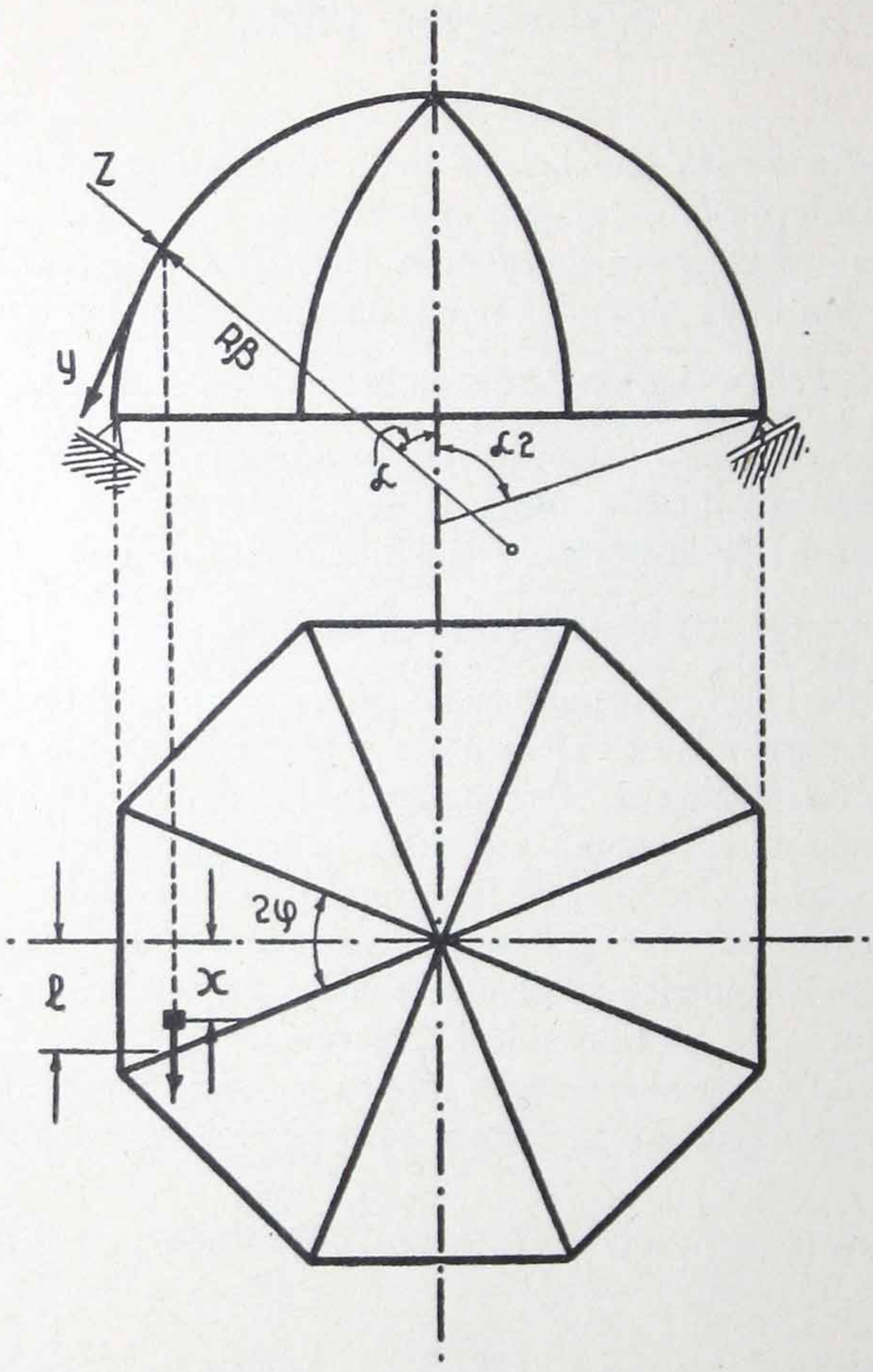
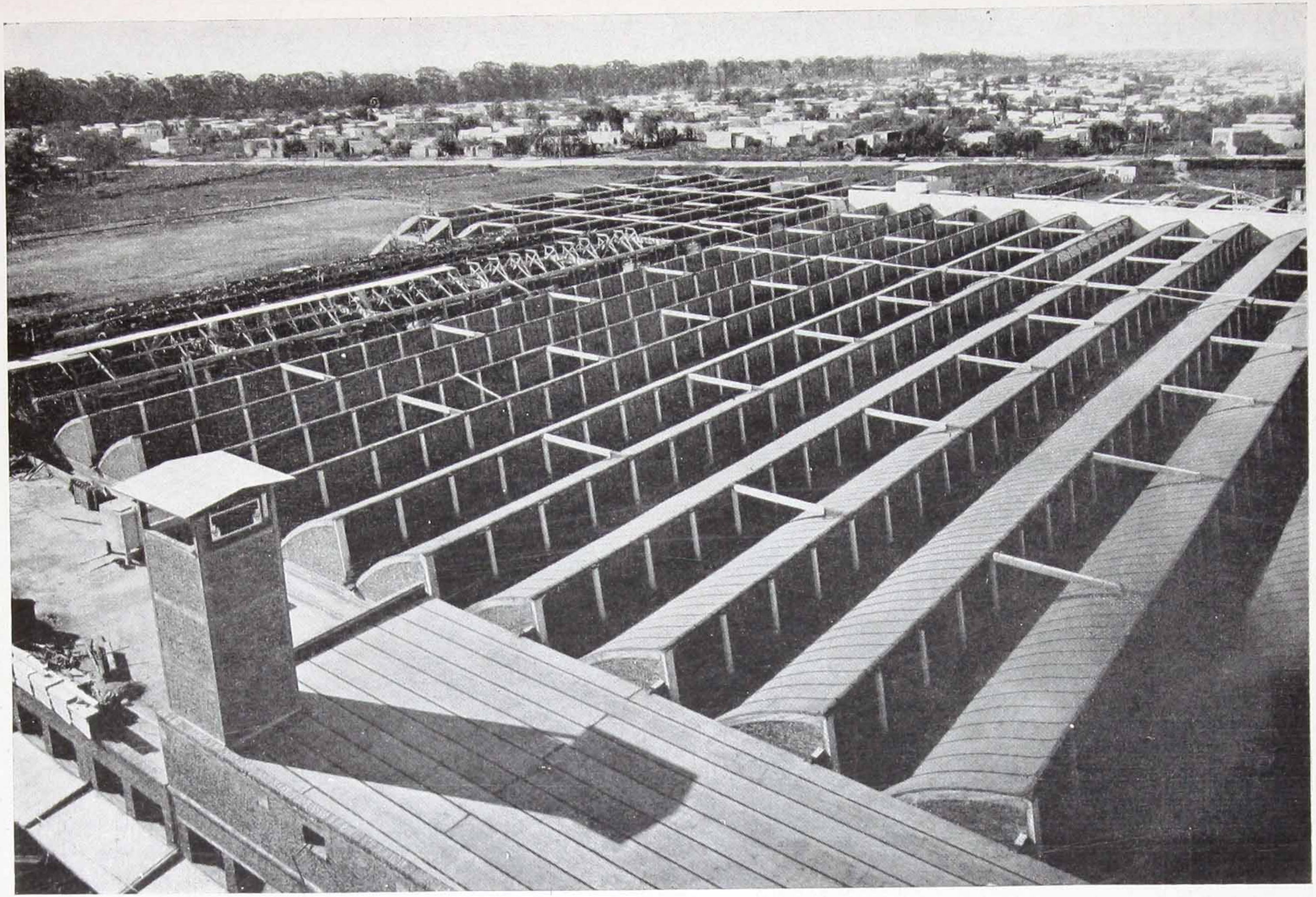
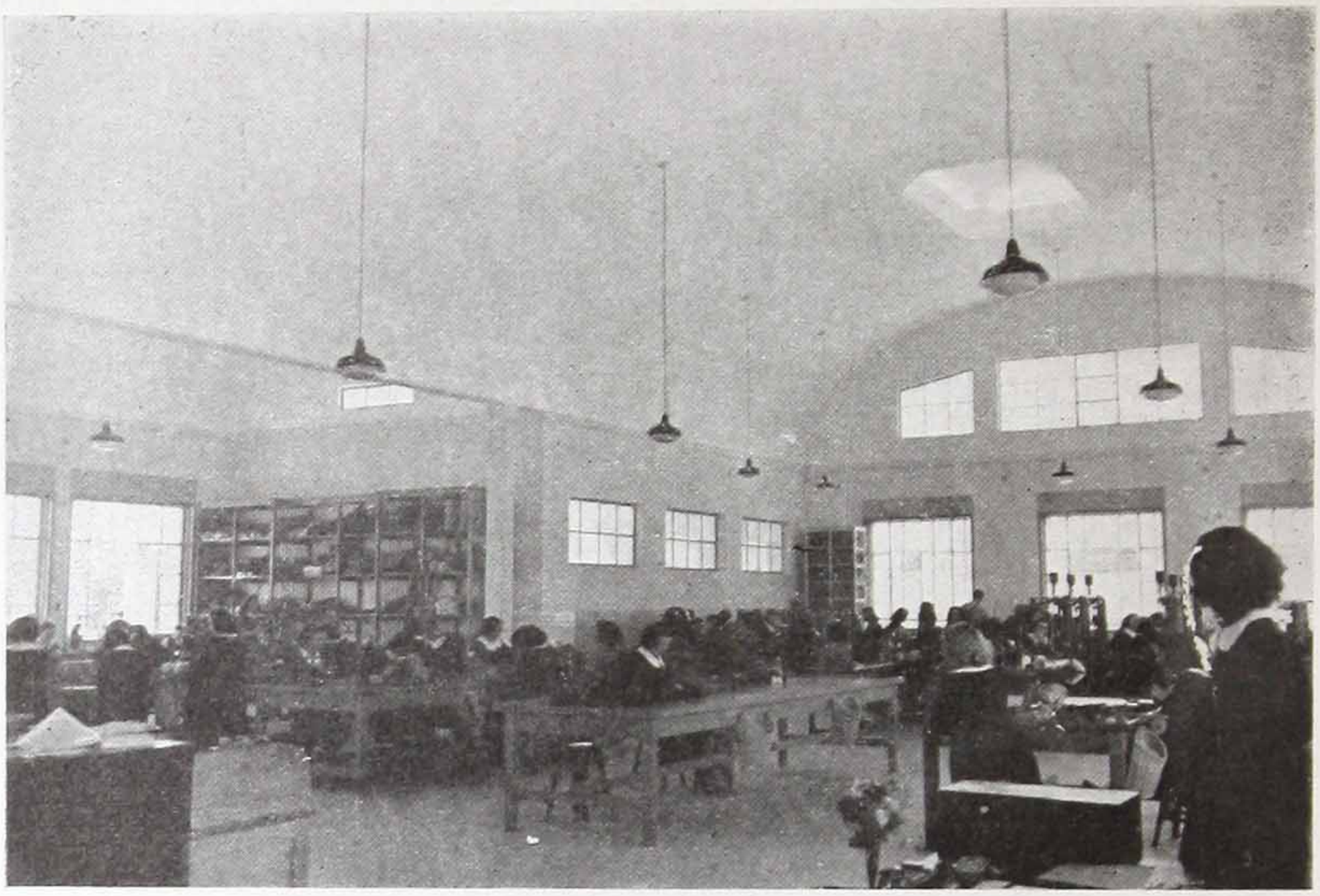


FIG. 21. — Bóveda por arista.

de bóveda que transmite los esfuerzos de borde de las aristas hacia los apoyos.

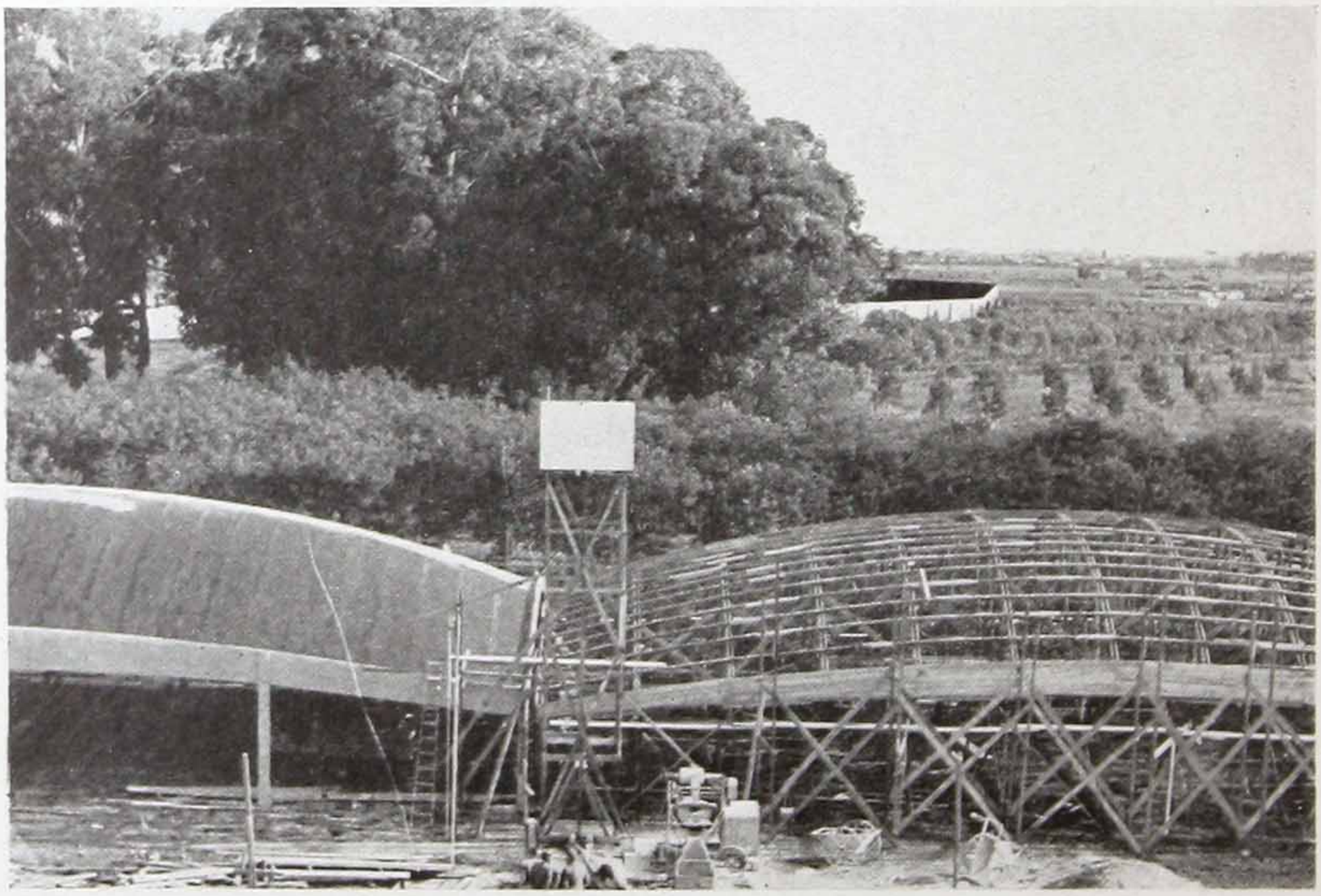


Vista general de la fábrica "Grafa".



Fábrica "Depé", de la firma José Liebl, en la calle Marcos Sastre 3029, Capital Federal. Bóveda cilíndrica de 12 × 25 m, con 8 m de altura.

Empresa constructora Gallo, Berg y Cía.



Club "Tiro a Segno", en Caseros, F. C. P. Dos techos de 12,50 × 27 m, con una altura de 7 m, sobre 4 canchas de bochas.

Empresa constructora Gallo, Berg y Cía.

Estado I. Solución para carga simétrica

Los esfuerzos tangenciales son nulos en todos los planos de simetría, es decir también en las secciones $x = 0$, de modo que $f_1(\alpha) = 0$

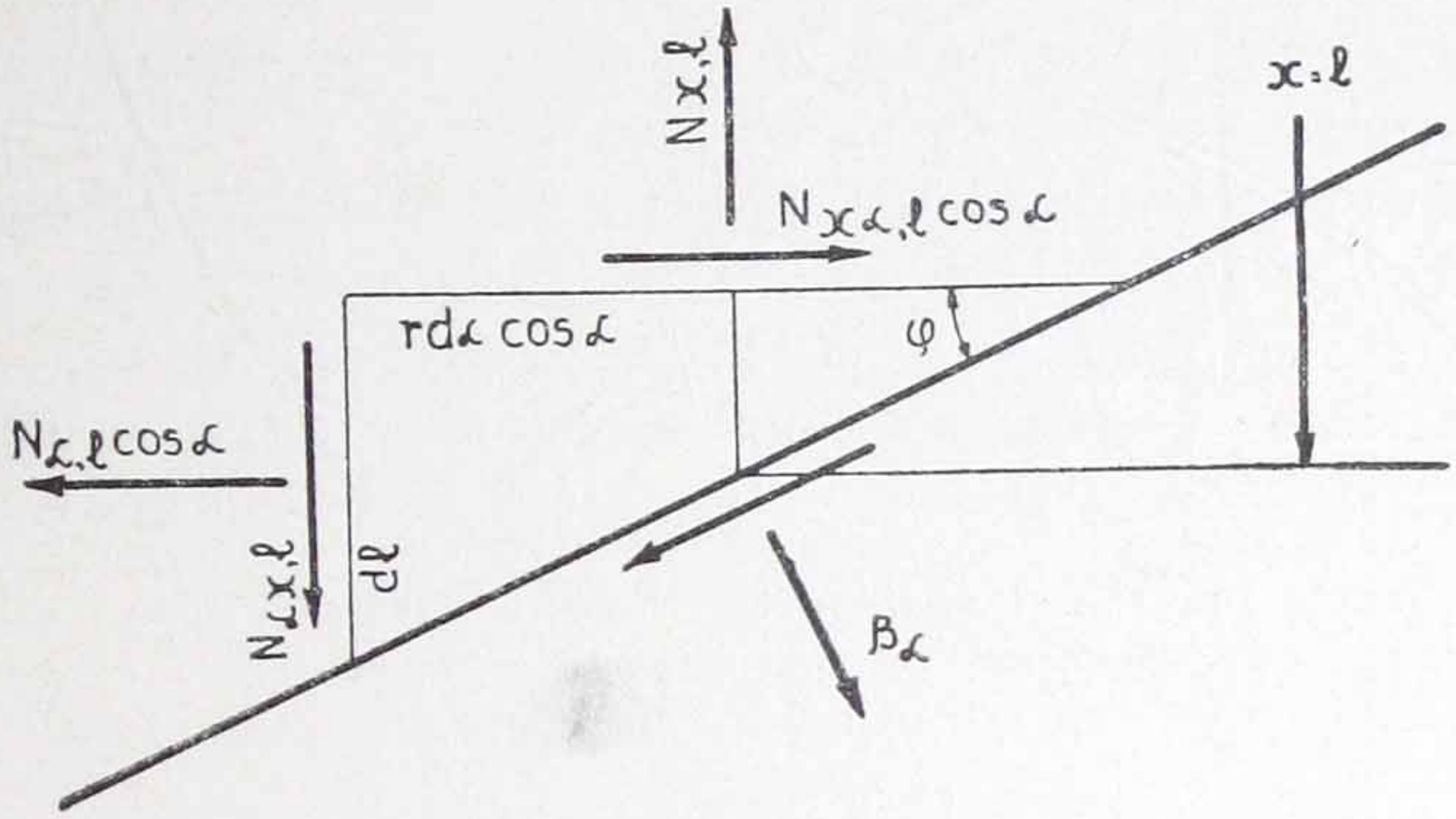


FIG. 22. — Fuerzas tangenciales.

Además hemos dicho que la componente B_α del esfuerzo de corte principal, es nula para la $x = l_\alpha$, de ahí que para la arista podemos escribir:

$$B\alpha = (N_{xl} - 2N_{\alpha xl} \cos \alpha tg\varphi + N_\alpha, l \cos^2 \alpha tg^2\varphi) R\beta d\alpha \cos \varphi = 0$$

La acción de viga de un sector de cáscara está representada por las siguientes componentes:

$$N_\alpha = -p_z R_\beta \qquad N_{\alpha x} = -p_y{}^* x$$

$$Nx^{(I)} = -\frac{l^2 - x^2}{2} \frac{\delta p_y{}^*}{R_\beta dx} - (2p_y{}^* l \cos \alpha tg\varphi + N\alpha \cos^2 \alpha tg^2\varphi)$$

Las que sólo pueden estar equilibradas mediante un esfuerzo longitudinal $Z_{\alpha_1}{}^{(I)}$ de un elemento fraccionado en el borde $\alpha = \alpha_2$

$$Z_\alpha{}^{(I)} = + \frac{l^2 - x^2}{2} p_y{}^* + \int_o^{\alpha_2} (2p_y{}^* l \cos \alpha tg\varphi + N\alpha \cos^2 \alpha tg^2\varphi) R_\beta d\alpha.$$

Estado II

El estado elástico producido por la acción de cúpula se compone del esfuerzo longitudinal $Nx^{(II)}$ originados por la transmisión de las cargas hacia las intersecciones.

Estos valores son fáciles de calcular como incrementos de las resultantes $Z_a^{(I)}$ de todos los esfuerzos longitudinales situados por encima de una sección horizontal.

Esto permite considerar como fuerzas exteriores en equilibrio mutuo, además de la resultante $Q\alpha$ de la carga, a los esfuerzos tangenciales N_α, $Z_\alpha^{(II)}$ y la fuerza longitudinal S_α.

La suma de todas las componentes debe estar en equilibrio

$$Q_\alpha + 4nlN_\alpha \operatorname{sen}\alpha + 2nS_\alpha \operatorname{sen}\gamma = 0$$

en la que $\operatorname{sen}\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2\alpha/\cos^2\varphi}}$

y por consiguiente $S_\alpha = -\left(\dfrac{Q\alpha}{2n} - 2p_z R_\beta r\alpha \operatorname{sen}\alpha \operatorname{tg}\varphi\right)\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2\alpha/\cos^2\varphi}$

Para mantener el equilibrio de las componentes horizontales de los esfuerzos de corte S_α, N_α con la fuerza tangencial $Z_\alpha^{(I)}$ en los vértices de una sección horizontal libre α, es necesario disponer del esfuerzo longitudinal $Z_\alpha^{(II)}$ de un anillo de tracción en la base.

$$Z_{\alpha_i}^{(II)} + \frac{S_\alpha \cos\gamma}{2\operatorname{sen}\varphi} + r_\alpha N_\alpha \cos\alpha + \int_o^\alpha (2p_y{}^* l \cos\alpha \operatorname{tg}\varphi + N_\alpha \cos^2\alpha \operatorname{tg}^2\varphi)\, R_\beta d\alpha$$

y $N_x^{(II)} = -\dfrac{\delta Z_\alpha^{(II)}}{R_\beta d\alpha}$

Por superposición de los estados I y II se obtiene el estado final.

$$N_x = N_x^{(I)} + N_x^{(II)} = -\frac{l^2 - x^2}{2}\frac{\delta p_y{}^*}{R_\alpha d\alpha} + \overset{\delta}{R_\beta d\alpha}\left(\frac{S_\alpha \cos\gamma}{2\operatorname{sen}\alpha} + r_\alpha N_\alpha \cos\alpha\right)$$

en la que $\frac{S_\alpha \cos \gamma}{2 \operatorname{sen} \varphi} + r_\alpha N_\alpha \cos \alpha = - \frac{Q_\alpha \operatorname{cotg} \alpha}{2n \operatorname{sen} 2\varphi} + p_z R_\beta r_\alpha \cos \alpha \operatorname{tg}^2 \varphi$

$$\text{siendo } \varphi = \frac{\pi}{2n}$$

Para el peso propio $p_x = 0 \quad p_y = g \operatorname{sen} \alpha \quad p_z = g \cos \alpha$

$$Q_\alpha = 4n \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n} \int_o^\alpha g R_\beta d\alpha = 4n \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n} Q_{\alpha 1}$$

Para sobrecarga de nieve

$$p_x = 0 \quad p_y = p \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \quad p_z = p \cos^2 \alpha$$

$$Q_\alpha = 4n \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n} Q\alpha_2$$

Si el meridiano es un arco de círculo

$$Q_{\alpha 1} = ga \left[a (1 - \cos \alpha) - c\alpha \right]$$

$$Q_{\alpha 2} = \frac{P_o}{2} (a \operatorname{sen} \alpha - c)^2$$

Si el meridiano es una cicloide

$$Q_{\alpha 1} = 2gf^2 \left(\alpha \operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha - \frac{1}{3} \cos^3 \alpha - \frac{2}{3} \right)$$

$$Q_{\alpha 2} = \frac{p_o}{2} f^2 \left(\alpha + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\alpha \right)^2$$

CÁLCULO DE LAS BÓVEDAS, AUTOPORTANTES COMPUTANDO LOS MOMENTOS FLECTORES

La teoría de las membranas no es exacta para el caso de las bóvedas autoportantes, pues es únicamente válida para un cilindro cerrado en las condiciones de carga establecidas y para una zona suficientemente alejada de los apoyos.

Todas las perturbaciones de borde, cambios de sección o cargas disimétricas, producen una alteración del estado de membrana que debe estudiarse introduciendo además los momentos flectores que actúan sobre un elemento, obteniéndose un estado de tensión, suma de los estados I y II (figs. 3 y 4).

Del equilibrio de todas estas fuerzas y momentos, se deduce que existe una función de tensión representada por una ecuación diferencial de octavo orden que resuelve el problema (4).

La ecuación es la siguiente:

$$\Delta = m^8 + m^6\,[2 - 4\alpha^2] + m^4\,[1 + \alpha^2(-8 + 2\nu) + 6\alpha^4] + m^2$$

$$[\alpha^2(-4 + 2\nu) + 6\alpha^4 - 4\alpha^6] + m^0\,[\alpha^4(4 - 3\nu^2) - 2\alpha^6 + \alpha^3] + \alpha^4\,\frac{1-\nu^2}{K} = 0$$

Esta ecuación diferencial ha sido integrada pero su solución representa un trabajo muy laborioso.

Para las bóvedas autoportantes de ancho menor o igual que la luz, los momentos M_x tienen igual importancia que los momentos M_a. Pero para losas de grandes luces los momentos M_a, que son los que tienden a abrir la bóveda en el punto medio, tienen valores tales con respecto a los M_x, que estos últimos pueden despreciarse.

---

(4) Esta ecuación ha sido planteada por el doctor F. DISCHINGER en el trabajo *La teoría exacta de las bóvedas cilíndricas y su empleo en las bóvedas "Zeiss Dywiday"*, publicado por Beton und Eisen, 20 de septiembre de 1935.

Según ya hemos indicado para el caso de luces hasta dos veces el ancho de la bóveda, puede admitirse sin mayor error la nulidad de los momentos y suponerse el estado puro de membrana. Pero a medida que aumenta la luz, los momentos M_α adquieren valores que conviene introducir en el cálculo.

Las tensiones producidas por este momento aplicado al borde de la bóveda, actúan en forma de onda amortiguada, de manera que la influencia de un momento es nula en el borde opuesto.

Una solución aproximada de este problema es la estudiada por el Dr. Ing. Finsterwalder, para bóvedas cilíndricas, y que resumiremos a continuación remitiendo al lector para mayores detalles a la memoria original presentada al Congreso de Zurich en 1932 (5).

Expresando la carga unitaria $p = 1$ en forma de una serie de Fourrier, se pueden escribir las siguientes expresiones que representan respectivamente los momentos y las deformaciones:

$$p = \frac{4}{\pi} cos \frac{\pi x}{L} - \frac{4}{3\pi} cos \frac{3\pi x}{L} + \frac{4}{5\pi} cos \frac{5\pi x}{L} - \ldots = 1$$

$$M = \frac{4}{\pi}\left(\frac{L}{\pi}\right)^2 cos \frac{\pi x}{L} - \frac{4}{3\pi}\left(\frac{L}{\pi}\right)^2 cos \frac{3\pi x}{L} + \frac{4}{5\pi}\left(\frac{L}{\pi}\right)^2 cos \frac{5\pi x}{L} - \ldots = \frac{L^2}{8} \qquad [25]$$

$$\delta = \frac{4}{\pi}\left(\frac{L}{\pi}\right)^4 cos \frac{\pi x}{L} - \frac{4}{3\pi}\left(\frac{L}{\pi}\right)^4 cos \frac{3\pi x}{L} + \frac{4}{5\pi}\left(\frac{L}{\pi}\right)^4 cos \frac{5\pi x}{L} = \frac{5}{384} L^4$$

Con estas consideraciones y suponiendo $M_x = 0 = Q_x = 0 = M_{\alpha x} = 0$, las 5 componentes restantes, M_α, Q_x, N_x, N_α, $N_{\alpha x}$ pueden determinarse con las cuatro ecuaciones de equilibrio y una condición de compatibilidad.

La distribución de la carga se supone que es simétrica con respecto al centro y que puede considerarse como el término general de una serie trigonométrica.

---

(5) *La teoría de las bóvedas cilíndricas y su empleo en el gran mercado de Budapest.* Dr. U. FINSTERWALDER. Memorias del Congreso de Zurich, 1932

Suponiendo que las componentes de tensión están convenientemente expresadas por una función $f(\alpha)$ similar a la expresada por Airy para determinar el estado de la placa plana, la componente del momento tendrá la siguiente expresión:

$$M_a = -\cos\frac{cx}{L} f(\alpha)$$

y aplicando las condiciones de equilibrio podremos calcular los valores Q_a, N_x, N_a, N_{ax} que tendrán las siguientes expresiones:

$$Q_a = \frac{\delta M_a}{R\delta\alpha} = -\frac{1}{R}\frac{\delta f}{\delta\alpha}\cos\frac{cx}{L}$$

$$N\alpha = -\frac{\delta Q\alpha}{\delta\alpha} = +\frac{1}{R}\frac{\delta^2 f}{\delta\alpha^2}\cos\frac{cx}{L}$$

$$\frac{\delta N_{xa}}{\delta x} = \frac{Q_a}{R} - \frac{1}{R}\frac{\delta N_x}{\delta\alpha} = -\frac{1}{R^2}\left(\frac{\delta f}{\delta\alpha} + \frac{\delta^3 f}{\delta\alpha^3}\right)\cos\frac{cx}{L} \qquad [26]$$

$$N_{xa} = -\frac{L}{R}\left(\frac{\delta f}{\delta\alpha} + \frac{\delta^3 f}{\delta\alpha^3}\right)\operatorname{sen}\frac{cx}{L}$$

$$\frac{\delta N_x}{\delta x} = -\frac{1}{R}\frac{\delta N_{ax}}{\delta\alpha} = \frac{L}{CR^3}\left(\frac{\delta^2 f}{\delta\alpha^2} + \frac{\delta^4 f}{\delta\alpha^4}\right)\operatorname{sen}\frac{cx}{L}$$

$$N_x = -\frac{L^2}{R^2 c^2}\left(\frac{\delta^2 f}{\delta\alpha^2} + \frac{\delta^4 f}{\delta\alpha^4}\right)\operatorname{sen}\frac{cx}{L}$$

Calculando en base a ello las deformaciones podremos igualmente escribir:

$$El\mu = \frac{1}{ava}\left(\frac{\delta^2 f}{\delta\alpha^2}(+1\gamma a) + \frac{\delta^4 f}{\delta\alpha^4}\right)\operatorname{sen}\frac{cx}{L}$$

$$El\gamma = \frac{1}{a}\left[2(1+\gamma)\left(\frac{\delta f}{\delta\alpha} + \frac{\delta^3 f}{\delta\alpha^3}\right) - \frac{1}{a}\left(\frac{\delta^3 f}{d\alpha^3} + \frac{\delta^5 f}{\delta\alpha^5}\right) - \gamma\frac{\delta^3 x}{\delta\alpha^3}\right]\cos\frac{cx}{L}$$

$$Et\omega = \left[\frac{\delta^2 f}{\delta\alpha^2}\left(\frac{\gamma}{a}-1\right)+\frac{2}{a}\left(\frac{\delta^2 f}{\delta\alpha^2}+\frac{\delta^4 f}{\delta\alpha^4}\right)-\frac{1}{a^2}\left(\frac{\delta^4 f}{\delta\alpha^4}+\frac{\delta^6 f}{\delta\alpha^6}\right)\right] cos\,\frac{cx}{L} \quad [27]$$

$$EtR\Theta = \left[-\frac{\delta^3 f}{\delta\alpha^3}+\frac{2}{a}\left(\frac{\delta f}{\delta\alpha}+2\frac{\delta^3 f}{\delta\alpha^3}+\frac{\delta^5 f}{\delta\alpha^5}\right)-\frac{1}{a^2}\left(\frac{\delta^3 f}{\delta\alpha^3}+2\frac{\delta^5 f}{\delta\alpha^5}+\frac{\delta^7 f}{\delta\alpha^7}\right)+\right.$$

$$\left.+2\frac{\gamma}{a}\left(\frac{\delta f}{\delta\alpha}+\frac{\delta^3 f}{\delta\alpha^3}\right)\right] cos\,\frac{cx}{L}$$

$$\text{Siendo } a = \frac{c^2R^2}{L^2}$$

Las constantes de integración son nulas siempre que se tengan las siguientes condiciones:

1) Carga distribuída simétricamente con respecto al plano transversal $x = 0$.
2) La bóveda puede deformarse libremente al final de los bordes.

Introduciendo los valores de M_α y de las deformaciones en la expresión que representa la variación de curvatura, tendremos la ecuación diferencial que resuelve la función de tensión (6).

$$\frac{\delta^8 f}{\delta\alpha^8}+2(1-a)\frac{\delta^6 f}{\delta\alpha^6}+[1-(4+\gamma)a+a^2]\frac{\delta^4 f}{\delta\alpha^4}+$$

$$+[-(2+\gamma)a+a^2]\frac{\delta^2 f}{\delta\alpha^2}+4a^2b^2(1-\gamma^2)f=0 \quad [28]$$

en la cual b tiene este valor $b = \sqrt{3}\frac{R}{t}$

La solución general de la ecuación tiene la siguiente forma:

$$f(\alpha) = e^{(J_1)\alpha}\left(A\,sen\,K_1\alpha + B\,cos\,K_1\alpha\right)+$$

$$+e^{(J_1'\alpha)}\left(C\,sen\,K_1'\alpha + D\,cos\,K_1'\alpha\right) \quad [29]$$

---

(6) Esta ecuación diferencial de octavo orden más sencilla que la planteada por Dichinger ha sido simplificada todavía por Herman Shorrer ("Acción de las cargas en las bóvedas delgadas cilíndricas" Proceedings de la A. S. C. E., mayo 1935), para el caso de bóvedas en las que $a \leq 1$, en la siguiente forma:

$$\frac{\delta^8 f}{\delta x^8}+4a^2b^2(1-\gamma^2)f=0$$

Esta ecuación nos indica que la función de tensión consiste en la suma de 2 ondas amortiguadas, en las cuales J_1 y J_1' representan los factores de amortiguación y K_1 y K_1' la longitud de onda. Estos 4 valores son constantes y están determinados por las dimensiones de la bóveda.

Los valores A, B, C y D son también constantes y están determinados por las condiciones del borde longitudinal para los cuales 4 componentes de tensión o de deformación tienen valores especialmente determinados dados por las condiciones de carga del borde o por las deformaciones del borde.

Los valores constantes J y K pueden obtenerse derivando la ecuación [29] e introduciendo esos valores en la ecuación [28]. El primer término de la función de tensión nos da la siguiente relación:

$$e^{(J_1)\alpha}\, sen\, K_1\alpha \Big[J_8 + 2(1-a)J_6 + [1-(4+\gamma)a+a^2]J_4 + a$$

$$(-2-\gamma+a)J_2 + 4a^2b^2(1-\gamma^2)] + e^{(J_1)\alpha}\, cos\, K_1\alpha\, [K_8 + 2(1-a)$$

$$K_6 + [1-(4+\gamma)a+a^2]K_4 + a(-2-\gamma+a)K_2] = 0 \quad [30]$$

Las expresiones J_2, J_4, etc., y K_2, K_4 están definidas por las siguientes funciones generales progresivas:

$$J_n = J_1J_{n-1} - K_1K_{n-1}$$

$$K_n = J_1K_{n-1} + K_1J_{n-1} \quad [31]$$

La ecuación [30] puede ser resuelta cuando las funciones F y G definidas a continuación, sean igual a cero:

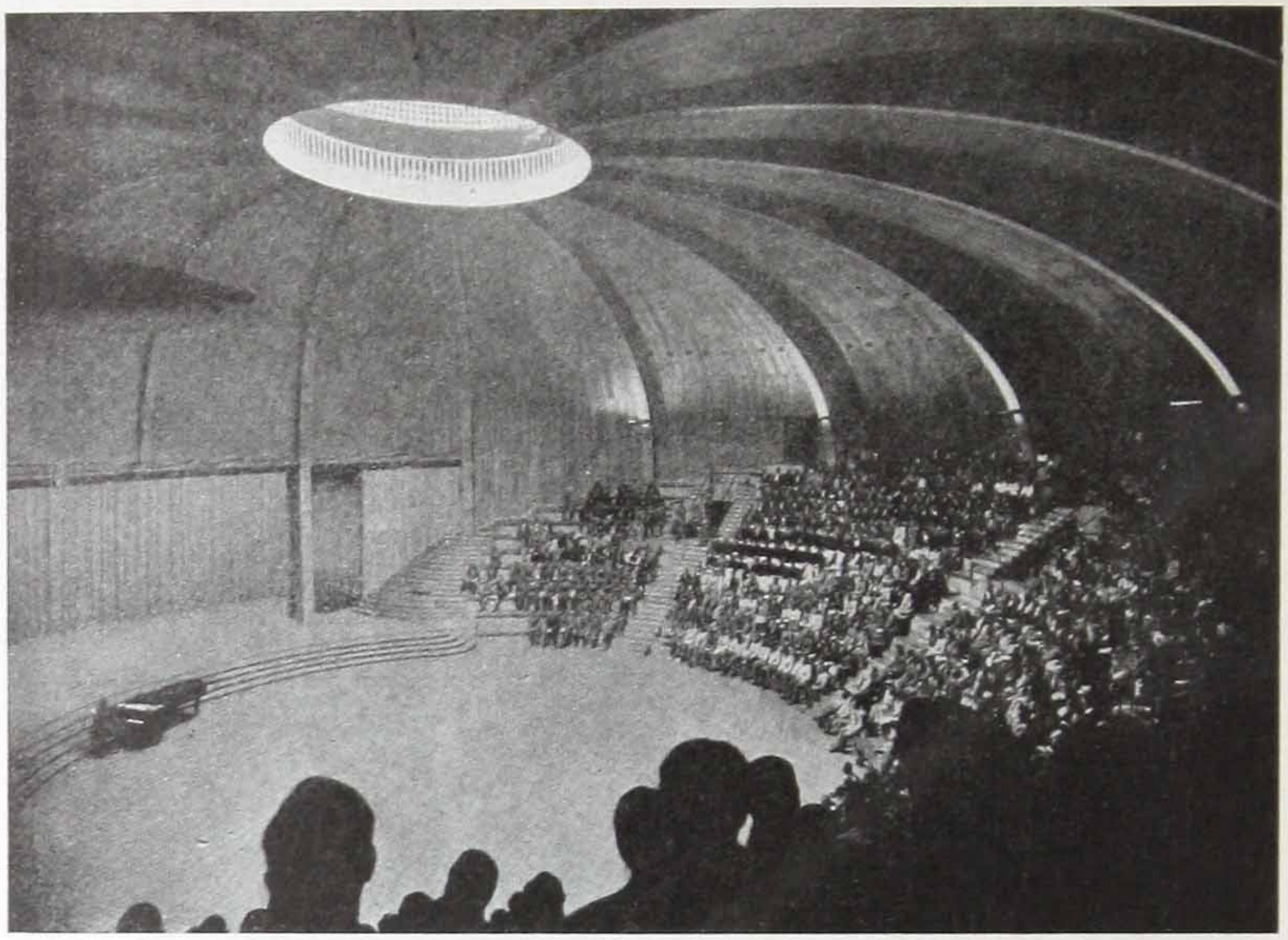
$$F = J_8 + 2(1-a)J_6 + [1-(4+\gamma)a+a^2]J_4 + a(-2-\gamma+a)J_2 +$$

$$+ 4a^2b^2(1-\gamma^2) = 0 \quad [32]$$

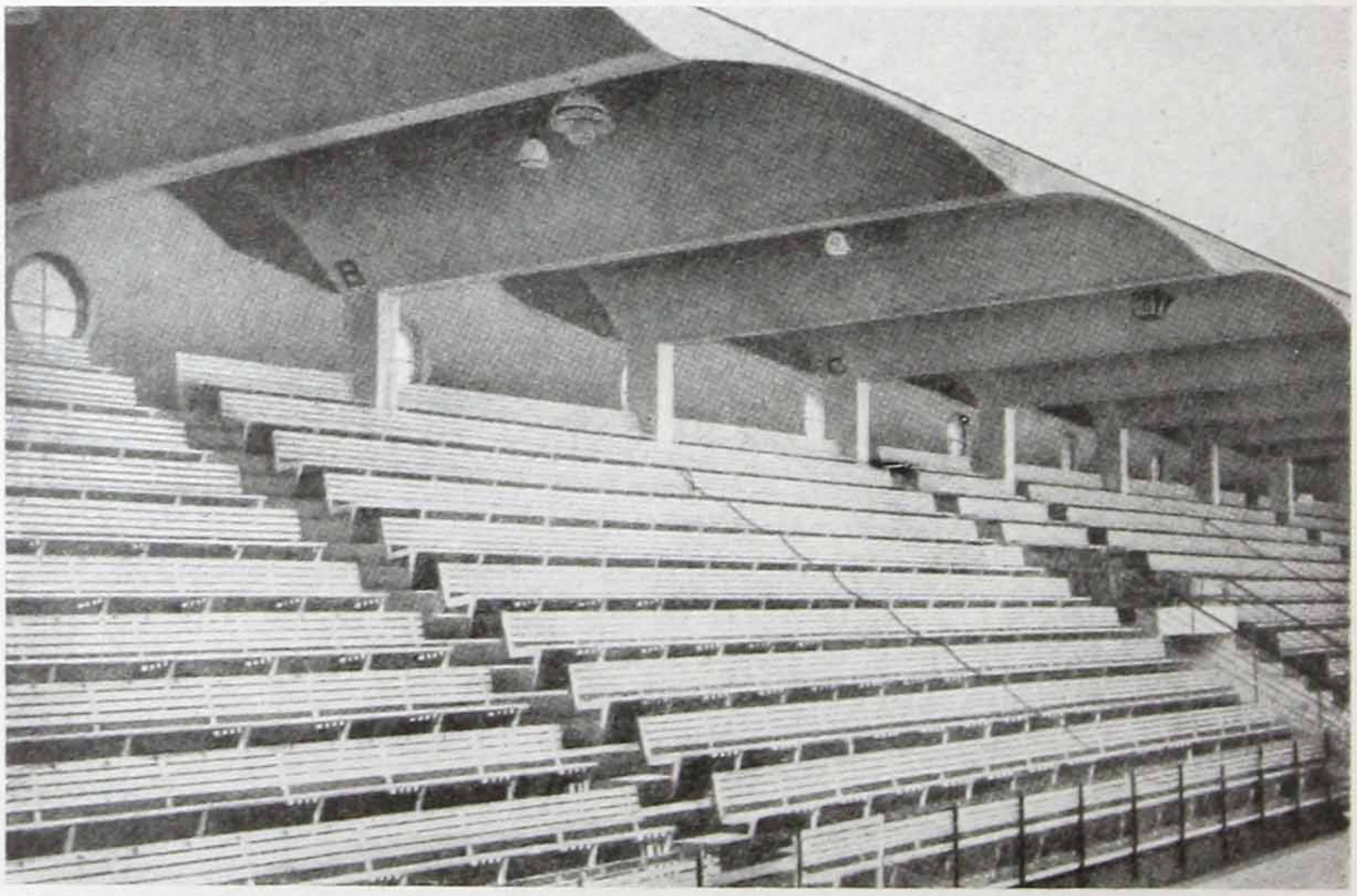
$$G = K_8 + 2(1-a)K_6 + [1-(4+\gamma)a+a^2]K_4 + a(-2-\gamma+a)K_2 = 0$$

Las derivadas del segundo término de la ecuación [31], substituídas en la ecuación [28], dan un par de ecuaciones idénticas para F y G.

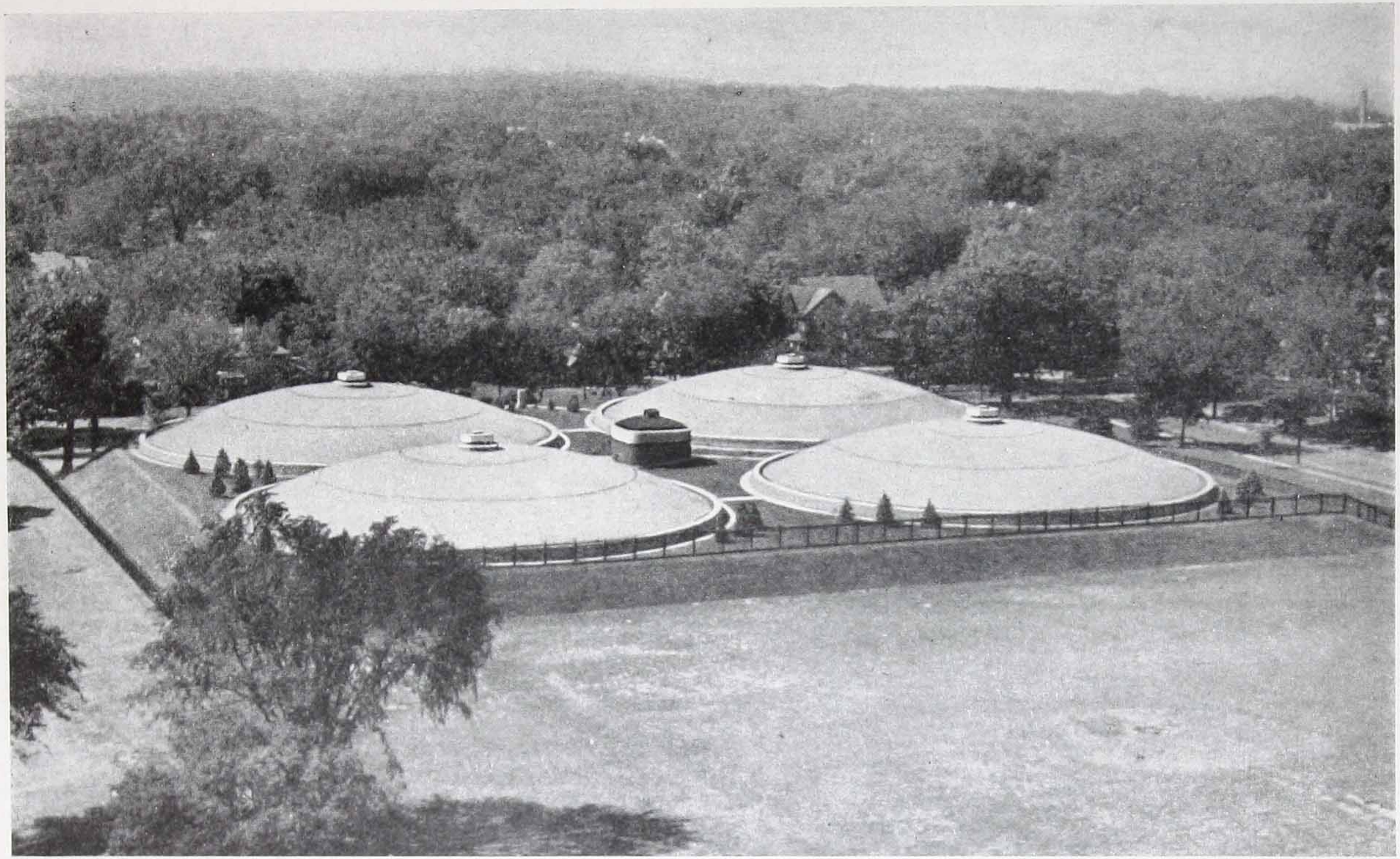
Fábrica de hojalatería de Bunge y Born. Sistema "Zeiss-Dywidag".
Empresa constructora Dykerof y Widman.



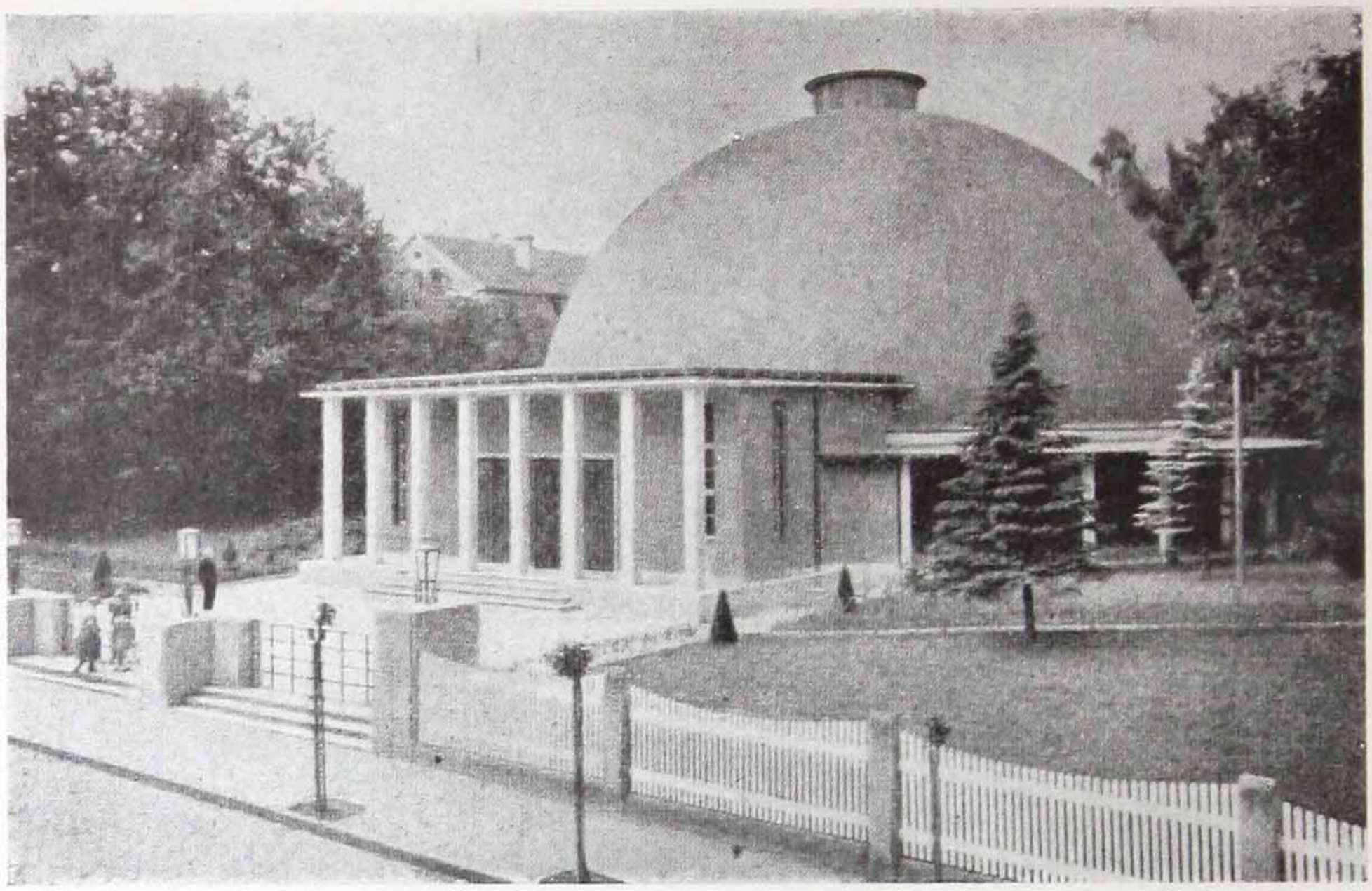
Auditorium Olympia, en Berlín. Sistema Zeiss-Dywidag.

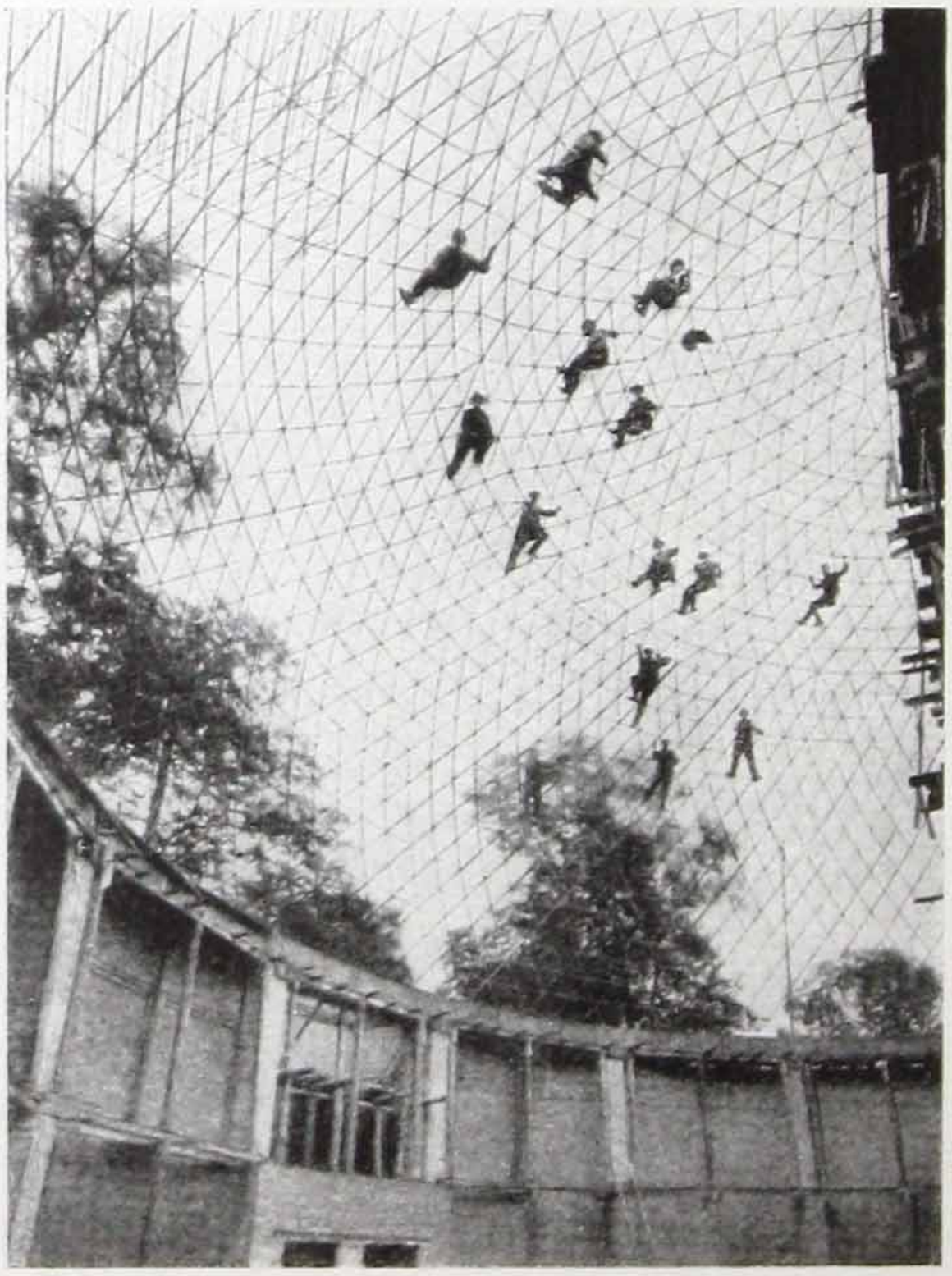


Tribuna de un estadio en Colonia, Alemania. Sistema Zeiss-Dywidag.



Bóvedas cáscara para grandes tanques de más de 500.000 litros de capacidad, construídos en Rock Island, EE. UU.





Cúpula del planetario de Jena, Alemania. Armadura sistema Zeiss.

Las funciones progresivas de J_n y K_n nos dan los siguientes valores.

$$
\begin{aligned}
J_2 &= J_1^2 - K_1^2 \\
J_4 &= J_2^3 - K_2^2 \\
J_6 &= J_2^3 - 3J_2K_2^2 \\
J_8 &= J_2^4 - 6J_2^2K_2^2 + K_2^4 \qquad [33] \\
K_2 &= 2J_1K_1 \\
K_4 &= 2J_2K_2 \\
K_6 &= 3J_2^2K_2 - K_2^3 \\
K_8 &= 3J_2^3K_2 - 4J_2K_2^3
\end{aligned}
$$

Substituyendo las ecuaciones [33] en [32] y las ecuaciones [29] en [28], se obtienen las siguientes ecuaciones para determinar los valores incógnitos J_2 y K_2

$$
\begin{gathered}
J_2^4 - 6J_2^2K_2^2 + K_2^4 + 2(1-a)J_2^3K_2^2 + [1-(4+\gamma)a + a^2] \\
(J_2^2 - K_2^2) + [-(2+\gamma)a + a^2]J_2 + 4a^2b^2(1-\gamma^2) = 0 \qquad [34]
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
4J_2^3 - 4J_2K_2^2 + 2(1-a)(3J_2^2 - K_2^2) + [1-(4+\gamma)a + a^2]2J_2 + \\
[-(2+\gamma)a + a^2] = 0
\end{gathered}
$$

No existe una solución explícita para resolver este par de ecuaciones, pero es posible buscar una solución aproximada y luego encontrar el error que se comete por medio del método de Newton.

La solución aproximada propuesta es la siguiente:

$$J_2 = \frac{a}{2} + Z \qquad J'_2 = \frac{a}{2} + Z'$$

$$K_2 = -K'_2 = +\sqrt{-\frac{a^2}{8} + \sqrt{\frac{a^4}{64} + a^2b^2}}$$

$$\text{Siendo } Z = -Z' = +\sqrt{\frac{a^2}{8} + \sqrt{\frac{a^4}{64} + a^2b^2}} \qquad [35]$$

Como los valores de las correcciones son pequeños, pueden obtenerse por diferenciación parcial y simplificando las siguientes expresiones:

$$\Delta J_2(4J_2^3 - 12J_2K_2^2 - 6aJ_2^2 + 6aK_2^2 + 2a^2J_2) + \Delta K_2(-12J_2^2K_2 + 4K_2^3 + \\ + 12aJ_2K_2 - 2a^2K_2) = -\Delta_1 \qquad [36]$$

$$\Delta J_2(12J_2^2 - 12aJ_2 + 2a^2 - 4K_2^2) + \Delta K_2(-8J_2K_2 + 4aK_2) = -\Delta_2$$

La ecuación [29] puede también escribirse en esta forma:

$$A(\gamma e^{(J_1)\alpha} sen\, K_1\alpha + \beta e^{(J_1)\alpha} cos\, K_1\alpha) + B(\gamma e^{J_1\alpha} sen\, K_1\alpha - \\ - \beta e^{J_1\alpha} cos\, K_1\alpha) + C\left(\gamma' e^{(J_1')\alpha} sen\, K_1'\alpha + \beta' e^{(J_1')\alpha} cos\, K_1'\alpha\right) + D$$

$$\left(\gamma' e^{(J_1')\alpha} sen\, K_1'\alpha - \beta e^{(J'_1\alpha)} cos\, K_1'\alpha\right) \qquad [37]$$

Los factores $\gamma, \gamma,' \beta$ y β' pueden calcularse como factores de la onda fundamental y tendrán los siguientes valores:

	Factores de la onda $e^{J_1\alpha} sin\, K_1\alpha$ y $e^{J_1\alpha} cos\, K_1\alpha$	
	γ	β
M_α	-1	0
Q_α	$-\frac{1}{R}J_1$	$-\frac{1}{R}K_1$
N_α	$+\frac{1}{R}J_2$	$+\frac{1}{R}K_2$
$\frac{\delta N_{\alpha x}}{\delta x}$	$-\frac{1}{R}(J_1 + J_3)$	$-\frac{1}{R}(K_1 + K_3)$
N_x	$-\frac{1}{aR}(J_2 + J_4)$	$-\frac{1}{aR}(K_2 + K_4)$
Etu	$\frac{2}{a}(J_1 + J_3) - \frac{1}{a^2}(J_3 + J_5)$	$\frac{2}{a}(K_1 + K_3) - \frac{1}{a^2}(K_3 + K_5)$
Etv	$-J_2 + \frac{2}{a}(J_2 + J_4)$	$-K_2 + \frac{2}{a}(K_2 + K_4)$
	$-\frac{1}{a^2}(J_4 + J_6)$	$-\frac{1}{a^2}(K_4 + K_6)$
$EtR\delta$	$-J_3 + \frac{2}{a}(J_1 + 2J_3 + J_5)$	$-K_3 + \frac{2}{a}(K_1 + 2K_3 + K_5)$
	$-\frac{1}{a^2}(J_2 + 2J_5 + J_7)$	$-\frac{1}{a^2}(K_3 + 2K_5 + K_7)$

	Factores de la onda $e^{J_1'\alpha} \sin K_1\alpha$ y $e^{J_1'\alpha} \cos K_1'\alpha$	
	γ'	β'
M_α	-1	0
Q_α	$-\frac{1}{R} J_1'$	$-\frac{1}{R} K_1'$
N_α	$+\frac{1}{R} J_2'$	$+\frac{1}{R} K_2'$
$\frac{\delta N_{ax}}{\delta x}$	$-\frac{1}{R}(J_1' + J'_3)$	$-\frac{1}{R}(K_1' + K_3')$
N_x	$-\frac{1}{aR}(J_2' + J_4')$	$-\frac{1}{aR}(K_2' + K_4')$
Etu	$\frac{2}{a}(J_1'+J_3') - \frac{1}{a^2}(J_3'+J'_5)$	$\frac{2}{a}(K_1'+K_3') - \frac{1}{a^2}(K_3'+K_5')$
Etv	$-J_2' + \frac{2}{a}(J_2' + J_4')$	$-K_2' + \frac{2}{a}(K_2' + K_4')$
	$-\frac{1}{a^2}(J_4' + J_6')$	$-\frac{1}{a^2}(K_4' - K_6')$
$EtR\delta$	$-J_3 + \frac{2}{a}(J_1 + 2J_3 + J_5)$	$-K_3 + \frac{2}{a}(K_1 + 2K_3 + K_5)$
	$-\frac{1}{a^2}(J_3 + 2J_5 + J_7)$	$-\frac{1}{a^2}(K_3 + 2K_5 + K_7)$

Para obtener aproximaciones semejantes deben considerarse únicamente las componentes de tensión y de deformación que contengan el factor $cos\ \frac{cx}{L}$ en las ecuaciones elásticas simultáneas.

Por esta razón se introduce la componente $\frac{\delta N_{ax}}{\delta x}$ en lugar de N_{aa} lo mismo que N_x en lugar de la deformación u.

Las ecuaciones de las componentes de tensión y de las deformaciones, pueden escribirse en la forma general

$$Aa + Bb + Ca' + Db' \qquad [38]$$

siendo $a = \gamma e^{J_1\alpha} sen\ K_1\alpha + \beta e^{(J_1\alpha)} cos\ K_1\alpha ...etc.$ (ecuación [37])

en las cuales las cuatro constantes A, B, C, D deben satisfacer las condiciones generales de borde, por ejemplo para $w = o$,

cuatro valores conocidos de las componentes de tensión M_a, Q_a, N_a, y $\frac{\delta N_{ax}}{\delta x}$ o las tres deformaciones u, v, w y la componente N_x.

La consideración de las condiciones de borde se simplifica en forma apreciable, usando los términos de influencia para las deformaciones del borde correspondiente a las cargas unitarias definidas como la suma de los términos de una ecuación trigonométrica.

Todas las deformaciones deben establecerse para el centro de la luz $x =$ en el cual el valor de la carga unitaria es $\frac{4}{c}$ medido por unidad de longitud.

Las cuatro condiciones de borde fundamentales que deben pues considerarse son las siguientes:

$$M_a = \frac{4}{c} \qquad Q_a = \frac{4}{c} \qquad \frac{\delta N_{ax}}{\delta x} = \frac{4}{c} \qquad N_a = \frac{4}{c}$$

que permiten plantear los siguientes grupos de ecuaciones

$$M_a = Aa + Bb + Ca' + Db' = \frac{4}{c} = 0 = 0 = 0$$

$$Q_a = Aa + Bb + Ca' + Db' = 0 = \frac{4}{c} = 0 = 0 \qquad [39]$$

$$\frac{\delta N_{ax}}{\delta \alpha} = Aa + Bb + Ca' + Db = 0 = 0 = \frac{4}{c} = 0$$

$$N_a = Aa + Bb + Ca' + Db' = 0 = 0 = 0 = \frac{4}{c}$$

Según demuestra Finsterwalder, se obtiene suficiente aproximación tomando únicamente el primer término de carga, es decir $C = +\pi$.

Es preferible dividir los estados de carga en simétricos y antisimétricos, en los cuales la carga está directamente aplicada en los bordes teniendo igual sentido o sentido contrario.

La solución de estas cuatro ecuaciones nos da los valores desconocidos de A, B, C, D, para cada una de las incógnitas.

A medida que aumente el argumento de la función, A, B, C y D, tenderán a tener valores constantes.

Esta condición se obtendrá cuando las cargas aplicadas al borde $\alpha_o = 0$ no influyan sobre las tensiones o deformaciones producidas por la carga aplicadas en $\alpha_o = \alpha_n$

Este cálculo laborioso —como puede observarse— y con las limitaciones indicadas, tiene aplicación práctica para determinar la influencia de la continuidad de dos bóvedas o de una bóveda con una viga de borde, etc.

El efecto de la continuidad de dos bóvedas colocadas una al lado de otra, que según el mismo autor de la teoría puede considerarse despreciable, y puede calcularse estableciéndose la pequeña diferencia entre las fuerzas de borde que tienden a separar las dos bóvedas.

Debe entonces determinarse un estado de tensión que anule la separación entre las bóvedas consecutivas que están una apoyada en la otra.

Como el estado de tensión de las bóvedas está determinado por cuatro condiciones de borde, es necesario establecer una cuarta condición que estará dada por la expresión $\Theta = 0$

Promediándose los dos valores pueden escribirse las ecuaciones que expresan las ecuaciones hiperestáticas en la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
&X_A\Delta_{AA} + X_B\Delta_{BA} + X_D\Delta_{DA} + X_E\Delta_{EA} + X_F\Delta_{FA} + X_H\Delta_{HA} + \Delta_{mA} = 0\\
&X_A\Delta_{AB} + X_B\Delta_{BB} + X_D\Delta_{DB} + X_E\Delta_{EB} + X_F\Delta_{FB} + X_H\Delta_{HB} + \Delta_{mB} = 0\\
&X_A\Delta_{AD} + X_B\Delta_{BD} + X_D\Delta_{DD} + X_E\Delta_{ED} + X_F\Delta_{FD} + X_H\Delta_{HD} + \Delta_{mD} = 0\\
&X_A\Delta_{AE} + X_B\Delta_{BE} + X_D\Delta_{DE} + X_E\Delta_{EE} + X_F\Delta_{FE} + X_H\Delta_{HE} + \Delta_{mE} = 0\\
&X_A\Delta_{AF} + X_B\Delta_{BF} + X_D\Delta_{DF} + X_E\Delta_{EF} + X_F\Delta_{FF} + X_H\Delta_{HF} + \Delta_{mF} = 0\\
&X_A\Delta_{AH} + X_B\Delta_{BH} + X_D\Delta_{DH} + X_E\Delta_{EH} + X_F\Delta_{FH} + X_H\Delta_{HH} + \Delta_{mH} = 0
\end{aligned}
$$

[40]

Los valores definitivos de las tensiones y de las deformaciones están dados por las determinaciones estáticas de las cargas simétricas y antisimétricas.

Estas pueden expresarse en conjunto por la siguiente expresión:

$$aYa + bY_B + a'Ya' + b'Y_B \qquad [41]$$

Los valores a, b, a' y b' pertenecen a los casos de cargas simétricas o antisimétricas o a un determinado estado de tensión o

deformación, lo mismo que a un punto determinado de la bóveda.

Los valores de Y son para el caso de cargas simétricas:

$$\begin{aligned} Y_A &= A_A\, X_A + A_B\, X_B + A_D\, X_D \\ Y_B &= B_A\, X_A + B_B\, X_B + B_D\, X_D \\ Y_{A'} &= B'_A X_A + B'_B X_B + B'_D X_D \\ Y_{B'} &= B'_A X_A + B'_B X_B + B'_D X_D \end{aligned} \qquad [42]$$

Para el caso de cargas antisimétricas:

$$\begin{aligned} Y_A &= A_E\, X_E + A_F\, X_F + A_H\, X_H \\ Y_B &= B_E\, X_E + B_F\, X_F + B_H\, X_H \\ Y'_A &= A'_E X_E + A'_F X_F + A'_H X_H \\ Y'_B &= B'_E X_E + B'_F X_F + B'_H X_H \end{aligned} \qquad [43]$$

BIBLIOGRAFÍA

EMPERGER: *Manual de hormigón armado.* Tomo VI: *Bóvedas cáscara y cúpulas*, por F. DISCHINGER.
Berlín, 1928.

MIESEL: *Sobre la resistencia de las bóvedas cilíndricas cargadas en forma asimétrica.*
Ing. Arch. (1930), pág. 22.

FINSTERWALDER: *La rigidez transversal cilíndrica.*
Bruchen bau and Hochban. Bd. 1. Zurich, 1932.

FLUGGE: *Estática y dinámica de las bóvedas cáscara.*
Berlín, 1934.

BEYER, K.: *Estática de las construcciones de hormigón armado.*
Berlín, 1934.

ISSEMAN PILARSKI: *Cálculo de las bóvedas delgadas de hormigón armado.*
París, 1935.

DISCHINGER: *La teoría exacta de las bóvedas cilíndricas y su empleo en las bóvedas Zeiss-Dywidag.*
Beton and Eisen, 20 de septiembre de 1935.

SHORRER: *Acción de las cargas sobre las bóvedas cáscara cilíndricas.*
Proceedings de la A. S. C. E., mayo de 1935.

DISCHINGER: *El tubo continuo en forma cilíndrica y el techo Zeiss-Dywidag.*
Memorias del 2º Congreso de puentes y estructuras. Berlín, 1936, volumen IV, pág. 226.

JACOBSEN: *Sobre el cálculo de la bóveda cilíndrica circular.*
Travaux, 1937, pág. 529.

JACOBSEN: *Las bóvedas cilíndricas con curvatura variable y espesor variable.*
Bauingenieur, 1937, pág. 418.

JACOBSEN: *Las bóvedas cilíndricas de forma elíptica.*
Genie Civil, 1937, pág. 323.

MOIKE Y KALINKA: *Principios del cálculo de las bóvedas cáscara de hormigón.*
Proceedings del A. C. I., mayo-junio de 1938.

JACOBSEN: *Problemas de perturbación de borde en las bóvedas cilíndricas.*
Bauingenieur, julio 28 de 1938, pág. 394.

TIMOSHENKO: *Placas y bóvedas.*
Nueva York-Londres, 1940.

PORTLAND CEMENT ASSOCIATION: *Modernas aplicaciones del hormigón armado.*
Núm. 2, 1942.

El 6 de mayo de 1943 se acabó de imprimir este folleto en los talleres gráficos de Sebastián de Amorrortu e hijos, avenida Córdoba 2028, Buenos Aires